TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FAKULTÄT FÜR ELEKTROTECHNIK
UND INFORMATIONSTECHNIK

Elektrotechnisches Institut

Lehrstuhl Leistungselektronik

DIPLOMARBEIT

Thema: Verlustoptimaler Betrieb von Asynchronmaschinen in transienten Arbeitsregimes

Vorgelegt von: Robin Weiß
Geboren am: 16.12.1988 in Ilmenau

Verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr.-Ing. Steffen Bernet
Betreuer: Dr.-Ing. Albrecht Gensior

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik Elektrotechnisches Institut, Professur Leistungselektronik

Aufgabenstellung für die Diplomarbeit

Name des Studenten: cand. ing. Robin Weiß

Thema: Verlustoptimaler Betrieb von Asynchronmaschinen in transienten Arbeitsregimes

Zielsetzung:
Beim Betrieb von Asynchronmaschinen kann ein vorgegebenes Drehmoment für verschiedene Wertepaare der Schlupffrequenz und der Rotorflussverkettung erreicht werden. Diese Freiheit kann beispielsweise zum Erreichen eines verlustoptimalen Betriebsregimes ausgenutzt werden. Besonders hilfreich ist in diesem Zusammenhang die Eigenschaft der differentiellen Flachheit eines Asynchronmaschinenmodells. Diese erlaubt es, die Systemvariablen und damit auch die Verluste der Maschine durch einen flachen Ausgang zu parametrieren. Da eine solche Verlustoptimierung für einen stationären Betrieb bereits Gegenstand verschiedener wissenschaftlicher Arbeiten war, soll im Kontext dieser Arbeit die flachheitsbasierte Minimierung der Verluste für transiente Arbeitsregimes stehen.

Im Rahmen der Arbeit soll ein geeignetes Modell einer Asynchronmaschine und der darin entstehenden Verluste aufgestellt werden. Das resultierende Optimierungsproblem soll gelöst und in einen Algorithmus implementiert werden.

Damit ergeben sich folgende Teilaufgaben:

- Einarbeitung in die Problematik und Literaturstudium,
- mathematische Modellbildung
- Entwurf eines Planungsalgorithmus, der ein verlustoptimales instationäres Betriebsregime ermöglicht
- Entwurf von Regelungsalgorithmen
- simulationsgestützte und experimentelle Verifikation der Ergebnisse

Betreuer:	Dr.-Ing. Albrecht Gensior
1. Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Steffen Bernet
2. Prüfer:	Dr.-Ing. Jens Weber
Ausgehändigt am:	1. 2. 2015
Einzureichen am:	~~31.7.2015~~ 3.8.2015 geä. DB

Prof. Dr. phil. nat. habil. R. Tetzlaff
Vorsitzender des Prüfungsausschusses

Prof. Dr.-Ing. S. Bernet
Verantwortlicher Hochschullehrer

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskriptes habe ich die Unterstützung von folgenden Personen erhalten:

Herrn Dr.-Ing. Albrecht Gensior.

Weitere Personen waren an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Mir ist bekannt, dass die Nichteinhaltung dieser Erklärung zum nachträglichen Entzug des Diplomabschlusses führen kann.

Dresden, den 8. Oktober 2015

Unterschrift

Kurzfassung

Viele Industrieprozesse erfordern häufige Drehmoment- und Drehzahlwechsel elektrischer Maschinen. Im dynamischen Arbeitsregime kann durch eine stets optimierte Rotorflussverkettung die Effizienz einer Asynchronmaschine gesteigert werden, wie bereits einige Veröffentlichungen zeigen. Für eine Asynchronmaschine mit Käfigläufer wird unter der Vorgabe von zyklisch linearen Drehzahländerungen die analytisch schwer lösbare Bedingung für eine verlustoptimale Rotorflusstrajektorie hergeleitet. Nach ausführlicher Analyse eines veröffentlichten Lösungsansatzes wird ein neuer Weg zur Berechnung eines energieeffizienten Flussverlaufs vorgeschlagen. Modellbasierte Berechnungen zeigen, dass die Flusstrajektorien energiesparender sind als herkömmliche Flussanpassungen im Fall einer linearen Drehzahländerung. Zur Validierung wurde am Versuchsstand eine rotorflussorientierte Regelung implementiert. Das Regelungsverhalten des Erstentwurfs konnte durch flachheitsbasierte Erweiterung der Regler nachweislich verbessert werden. Es zeigte sich in einer ersten Versuchsreihe an einem 4 kW Asynchronmotor, dass der Betrieb mit verlustoptimaler Flusstrajektorie dem Betrieb mit Nennfluss in einem transienten Arbeitsregime meist überlegen ist.

Abstract

Applications like industrial processes often demand cyclic transitions of torque and speed from electrical machines. The efficiency of induction machines can be increased using a continous fitted rotorflux in transient operation as former researches show. Focusing on induction motors with squirrel cage this thesis deduces the condition for a loss-optimized rotorflux based on an application with linear speed-changes. A new way to calculate an efficient flux trajectory is shown after an extensive analysis of a published approach. Model based calculations demonstrate that the calculated flux trajectories lead to more efficiency than the conventional constant flux operation for the linear speed transients. A rotor flux oriented control is set up on a 4 kW induction motor in order to validate the new approach. The first draft of the control was evidently improved by a flatness-based extension of the controllers. A first series of experiments demonstrates that the approach using the loss-optimized flux trajectories is mostly superior to the operation at rated flux.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **1**

1.1. Motivation 1

1.2. Stand der Technik 2

2. Variationsrechnung **5**

2.1. Einführung des Variationsoperators δ 5

2.2. Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung 6

3. Modellbildung **9**

3.1. Raumzeigergleichungen der Asynchronmaschine 9

3.2. Zustandsdarstellung des Modells 12

3.3. Modell im rotorflussfesten d-q-Koordinatensystem 14

3.4. Modellreduktion im rotorflussfesten Koordinatensystem 16

4. Flachheitsanalyse **17**

4.1. Definition Flachheit 17

4.2. Flachheit des vollständigen Modells 18

4.2.1. Beweis des flachen Ausgangs $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ 20

4.2.2. Beweis des flachen Ausgangs $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ 20

4.2.3. Auswahl eines flachen Ausgangs 21

5. Verlustmodell des Antriebs **23**

5.1. Überblick der Maschinenverluste 23

5.2. Relevante Verluste für die Regelung der Asynchronmaschine 25

5.3. Diskussion der Eisenverluste 26

5.4. Verlustmodell für die Asynchronmaschine 28

5.5. Betrachtung zur Minimierung der Verluste 30

5.5.1. Stationärer Arbeitsbereich 31

5.5.2. Dynamischer Arbeitsbereich 31

5.5.3. Diskussion zur Existenz eines Minimums 33

6. Trajektorienplanung für geringe Verluste im dynamischen Betrieb 35
6.1. Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung mit numerischer Methode 36
6.2. Diskussion einer publizierten Lösung 39
6.2.1. Beschreibung der Methodik 39
6.2.2. Schwächen der publizierten Methodik 43
6.3. Untersuchung des Zeithorizontes der Flusstrajektorie 50
6.4. Trajektorienplanung auf Basis eines approximierten Verlustmodells 52
6.4.1. Modifiziertes Verlustmodell mit Methode der kleinsten Quadrate . . 52
6.4.2. Flusstrajektorie aus Euler-Lagrange-Gleichung 55
6.4.3. Flusstrajektorie als quadratische Funktion 56

7. Regelungsentwurf 60
7.1. Flussbeobachter 62
7.2. Realisierung der PI-Regler 63
7.3. Flachheitsbasierte PI-Regler 65
7.3.1. Reglergleichung für Ψ_{Rd} 65
7.3.2. Reglergleichung für ω_{m} 66
7.4. Anti-Windup-Methode 66

8. Experimente 68
8.1. Aufbau des Teststandes 68
8.2. Reglervalidierung 69
8.3. Vergleich zwischen Betrieb mit Nennfluss und mit verlustoptimaler Trajektorie 70

9. Zusammenfassung 75

Anhang 76

A. Betrachtung des alternativen flachen Ausgangs $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ 77
A.1. Verlustmodell parametriert durch $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ 77
A.1.1. Aufteilen des Modells in einzelne Terme 77
A.1.2. Berechnung der spezifizierten Terme 78
A.1.3. Finale Darstellung des Modells $P_{\mathrm{v}} = f(I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ 80
A.2. Herleitung des Minimums der Verluste 80
A.2.1. Im stationären Betrieb 80
A.2.2. Im dynamischen Betrieb 81

B. Skripte **84**
B.1. Skript zum Lösen der Gleichung (5.21) 84
B.2. Koeffizientenberechnung der quadratischen Flusstrajektorie 85

Literaturverzeichnis **88**

1. Einleitung

1.1. Motivation

Elektrische Motoren und deren angetriebene Systeme sind für mindestens 43 % des weltweiten elektrischen Energieverbrauchs verantwortlich [WB11, S. 39]. Die größte Verbraucheruntergruppe bilden Asynchronmaschinen mit Käfigläufern. Die Gründe für die große Verbreitung der Maschinen liegen auf der Hand: Sie sind günstig in der Herstellung, robust, wartungsfrei und einfach zu betreiben. Es gibt Alternativen wie die permanent erregten Synchronmaschinen, die in Leistungsdichte und Effizienz einer Asynchronmaschine überlegen sind, dennoch ist deren Markteinzug noch gering. Wegen der genannten Gründe ist davon auszugehen, dass Asynchronmaschinen mittelfristig die Hauptverbraucher unter den elektrischen Antrieben bleiben werden.

Dies impliziert, dass eine Verringerung der Verluste von Asynchronmaschinen von wenigen Prozent einen großen Einfluss auf den weltweiten Energieverbrauch hat. Eine gezielt verlustarme Maschinenkonstruktion und die Verwendung von speziellen Eisenblechen mit geringen Verlustkennziffern führt zu einer sehr effizienten Asynchronmaschine, die heute nach internationalen Standards mit IE3 klassifiziert ist. Maschinen, die diesen oder ältere Standards erfüllen, besitzen in der Regel einen hohen Wirkungsgrad unter Nennlast. Im Teillastbereich ist die Effizienz deutlich geringer und daher ist speziell dort das größte Sparpotential vorhanden. Ein guter Ansatz ist die Verwendung von Frequenzumrichtern in Antrieben, um deren Drehzahl wunschgemäß einzustellen. Zwei Vorteile ergeben sich: Zum einen wurde die Drehzahlregulierung traditionell durch mechanische Systeme (Bremsen) oder durch Vergrößerung der elektrischen Verbraucher (Rotorwiderstände) vorgenommen. Diese Hauptverursacher von Verlusten der Systeme im Teillastbereich entfallen. Zum anderen können drehzahlregelbare Antriebe als Direktantriebe verbaut werden und verzichten auf die Getriebe. Das ist kosten- und verlustsparend. Des Weiteren ist die Drehzahlregelung für sich so zu entwerfen, dass die Maschine im Teillastbereich sowie bei

Nennlast, sprich in jedem Arbeitspunkt, verlustminimiert betrieben wird. In diesem Bereich gibt es verschiedene Herangehensweisen, die im nächsten Abschnitt kurz beleuchtet werden. Um dort auf die richtige Regelungsstrategie zu schließen, ist auch entscheidend zu wissen, in welchen Arbeitsprozessen elektrische Maschinen heutzutage verwendet werden.

Es gibt vier große Anwendungsgebiete, die einen ähnlich großen geschätzten Anteil am weltweiten Energieverbrauch der Motoren besitzen: Kompressoren (32 %), Pumpen (19 %), Lüfter (19 %) und Mechanische Bearbeitungs- oder Bewegungsprozesse (30 %), [WB11, S. 39]. Die drei erstgenannten Endverbraucher finden oftmals Anwendung in Heizung, Lüftung und Klimaanlagen (HLK). Diese Anwendungen teilen eine Charakteristik: Das Lastmoment ist proportional zum Quadrat der Drehzahl und der Arbeitspunkt wird meist selten gewechselt. Anders verhält es sich mit dem Bereich der Servoantriebe und in der Elektromobilität. Hier werden selten Motoren bei Nennlast betrieben. Ebenso besitzen viele andere Anwendungen transiente Arbeitsregimes, beispielsweise Förderbänder, Aufzüge, Kräne und Industrieroboter. Diese Anwendungen profitieren ebenfalls sehr von einer Regelung, die Verluste in Abhängigkeit des Last- und Drehzahlprofils minimiert.

In dieser Arbeit sollen die bisherigen Erkenntnisse zu verlustoptimalen Regelungen einer Asynchronmaschine ausgebaut werden. Speziell im Fall eines oft wiederholten mechanischen Prozesses, der den Wechsel zwischen zwei Arbeitspunkten erfordert, ist eine übliche Verlustoptimierung in einem stationären Betriebsregime fraglich. Die kurzen Zeiträume, in denen die Drehzahl und das geforderte Drehmoment konstant sind, werden heute meist unter geringsten Verlusten realisiert. Die Verluste, die im Zeitraum der Überführungen (dynamische Abschnitte) auftreten, werden jedoch nicht minimiert. Im Gegenteil können sogar weitaus größere Verluste in den dynamischen Abschnitten erzeugt werden. Dies gilt es genauer zu untersuchen, wobei der Entwurf einer Regelung, die in Echtzeit die Verluste in jedem Betriebsfall reduziert, eine große Herausforderung darstellt.

1.2. Stand der Technik

Es gibt verschiedene Regelungsansätze, die zur Minimierung der Verluste führen. Bereits in [KG83] wurde vorgestellt, wie die Leistungseffizienz einer Asynchronmaschine im Teillastbereich mit Hilfe einer entsprechenden Steuerung gesteigert werden kann. Die Grundlage

ist eine Verringerung der drehmomenterzeugenden Rotorflussverkettung auf ein Optimum. So sinkt die felderzeugende Komponente des Statorstromes und die Maßnahme führt zur signifikanten Verringerung der Verluste im Teillastbereich der Maschine. Dieser Vorgang wird Flussanpassung genannt. Es gab verschiedene Vorschläge und Untersuchungen wie man diese implementieren kann.

Der modellbasierte Ansatz berechnet die benötigte Rotorflussverkettung aus einem mathematischen Verlustmodell, dessen Genauigkeit von den Maschinenparametern und getroffenen Modellbildungsannahmen abhängig ist [LN04]. Eine weitere Vorgehensweise misst die Eingangsleistung der Maschine und minimiert diese durch schnell folgende Korrekturen der Rotorflussverkettung während des Betriebes [KNL85]. Andere Ansätze kombinieren die Varianten zu Hybridmethoden. Diese versuchen die Nachteile der beiden Ansätze zu umgehen. Alle genannten Methoden betrachten nur die Verlustminimierung im stationären Betrieb verschiedener Arbeitspunkte. Eine ausführliche Übersicht mit experimentellen Vergleichen gibt [Abr00].

Die etablierten Ansätze betrachten kein dynamisches Verhalten der Maschine, wie Drehzahlüberführungen und/oder Drehmomentübergänge in der Effizienzoptimierung. Unter Einbezug der transienten Vorgänge in einer Maschine stellt [VL03] eine Erweiterung der vorgestellten Strategie vor. Die Regelung wechselt ihre Zielstellung, wenn Drehmomentwechsel anstehen. Mit Hilfe eines Algorithmus wird die Dauer für den Arbeitspunktwechsel minimiert. Der Beitrag wendet sich dem Problem großer Einschwingdauer der Sprungantwort bei Drehmomentaufschaltung zu, wenn der optimale Fluss [1] gering ist. Es erfolgt kein Vorschlag zur Minimierung der Verluste in dynamischen Vorgängen.

Nur wenige Arbeiten setzen sich mit der Verlustminimierung im dynamischen Betrieb auseinander. Ein Vorschlag das Problem rein numerisch zu lösen kommt von [LY92b], wobei der komplette Verlauf von Drehmoment und Drehzahl vorher bekannt sein muss. Der zeitabhängige optimale Flussverlauf wird offline berechnet, um anschließend von der Regelung genutzt zu werden. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Effizienzverbesserung im Vergleich zu einem Betrieb mit konstantem Nennfluss. Leider handelt es sich bei der Offline-Berechnung um eine Einschränkung auf sehr spezifische Anwendungen, deren kompletter Betriebszyklus im Detail bekannt ist. Eine erste ausführliche analytische Studie zur Verlustminimierung im dynamischen Betrieb wurde in [WR99] veröffentlicht. Die Verfasser fanden die mathematische Bedingung für die kleinste Verlustenergie mittels der

[1] Es handelt sich hierbei korrekterweise um die Flussverkettung. Im Regelfall wird in dieser Arbeit zwischen den Begriffen nicht unterschieden. Falls dies nötig ist, so wird darauf explizit verwiesen.

Variationsrechnung, aber konnten keine analytische Lösung für die nichtlineare Differentialgleichung anbieten. An dieser Stelle knüpft zunächst die Veröffentlichung [SK13] an, deren Inhalt kurze Zeit später in [SDK13] ausführlicher beschrieben wird. Die Autoren Stumper, Dotlinger und Kennel setzen eine exponentielle Kurve für den Drehmomentübergang voraus und finden dafür in wenigen numerischen Rechenschritten den optimalen Flussverlauf, der die Verluste minimiert. Die kompakte Berechnung reicht für eine Echtzeitimplementierung des Algorithmus aus. Die erreichte effiziente Flussanpassung bei Drehmomentsprüngen ist eine gute Approximation und regt zur ausführlichen Diskussion an. Die veröffentlichten Ergebnisse werden dazu in Abschnitt 6.2 genauer betrachtet und analysiert.

Diese Arbeit widmet sich zunächst der Variationsrechnung, die wichtige mathematische Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabenstellung enthält. Im Anschluss folgen Modellbildungen: Das Modell der Asychronmaschine mit Käfigläufer und das Verlustmodell. Anhand dieser werden generelle Betrachtungen zur Verlustminimierung durchgeführt. Im Zuge dessen wird ein Arbeitsregime definiert, das sowohl stationäre als auch transiente Verläufe aufweist. Das nächste Kapitel widmet sich der Planung einer Flusstrajektorie, die anhand des Arbeitsregimes zu maximaler Energieersparnis führt. Dabei wird auch die Methodik Stumpers auf ihr Potential untersucht. Ziel ist es, eine Alternative zu finden, die noch effizienter und vielseitiger einsetzbar ist. Eine Regelungsrealisierung erlaubt das anschließende Testen und Messen am Versuchsstand.

2. Variationsrechnung

Die Variationsrechung ist ein Bereich der Mathematik. Im Zuge der Entwicklung der analytischen Mechanik, die von Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange maßgeblich geprägt wurde, stellte die Variationsrechnung die Lösung zu Extremwertproblemen einer bestimmten Art dar: Die analytische Suche nach stationären Funktionen für ein Integral. Der Integrand des Integrals kann eine unbekannte Funktion und deren Ableitungen enthalten. Die stationären Funktionen lassen das Integral ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt annehmen. Zur Ermittlung dieser zunächst unbekannten Funktionen veröffentlichte Leonhard Euler und später (1760) Lagrange ein „Essay on a new method of determining the maxima and minima of indefinite integral formulas“ und vereinfachte damit die analytische Anwendbarkeit der Variationsrechnung [OR].

Im Vordergrund der Arbeit steht der verlustoptimale Betrieb der Asynchronmaschine, dass heißt es wird das Minimum für das Integral der Verlustleistungen in einem bestimmten Zeitraum gesucht. Das Integral

$$E_\mathrm{V} = \int_{t_0}^{t_1} P_\mathrm{V}(y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n) dt \stackrel{!}{=} \min \tag{2.1}$$

entspricht der Verlustenergie in der Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$. Die Lösung dieser Aufgabenstellung kann mit den Grundlagen der Variationsrechnung erfolgen.

2.1. Einführung des Variationsoperators δ

Wenn eine Funktion

$$F = F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{2.2}$$

nur von den beliebigen Variablen y_k mit $k = (1, \ldots, n)$ abhängt und diese voneinander unabhängig sind, so kann ein stationärer Wert durch die Betrachtung der Funktionswerte in unmittelbarer Nähe ermittelt werden. Besitzen alle unmittelbar benachbarten Punkte der Funktion F an einem bestimmten Punkt den gleichen Funktionswert, so handelt es sich bei diesem Punkt um einen lokalen Extremwert. Zur Feststellung des stationären Wertes variiert man den Funktionswert F infinitesimal. Die verwendete Nomenklatur für eine variierte Größe ist das Zeichen δ. Nach elementaren Regeln gilt für eine Variation von F:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2}\delta y_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n. \tag{2.3}$$

Damit die notwendige Bedingung $\delta F = 0$ für einen Extremwert erfüllt wird, muss für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.4}$$

gelten. Die Art des stationären Wertes wird mit dem Ergebnis aus

$$\delta^2 F = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\delta y_i \delta y_k \tag{2.5}$$

beurteilt (in Ähnlichkeit zur Kurvendiskussion mit einer unabhängigen Größe wird hier auch zur Identifikation die zweite Ableitung benötigt).

2.2. Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Die Extremwertberechnung eines Integrals lässt sich mit Mitteln der Variationsrechnung näher untersuchen. Angenommen, die Funktion $y = f(x)$ minimiert das Integral der Form

$$I = \int_a^b F(y, \frac{dy}{dx}, x)dx, \tag{2.6}$$

dann muss man beweisen, dass eine geringfügig veränderte Funktion $y = \bar{f}(x)$ das Integral hinsichtlich des Ergebnisses nicht beeinflusst, sprich die Änderung gleicht Null. Die

veränderte Funktion kann durch

$$\bar{f}(x) = f(x) + \epsilon\phi(x) \tag{2.7}$$

ausgedrückt werden. Für ϵ gegen Null werden sehr kleine Veränderungen erlaubt. Die Variation von y ergibt sich demnach zu

$$\delta y = \bar{f}(x) - f(x) = \epsilon\phi(x). \tag{2.8}$$

Bei der Variation von y gilt außerdem, dass $\delta x = 0$ ist, weil sich diese nur auf die Veränderung des Wertes von y an einem Punkt x bezieht. Sind zusätzlich die Funktionswerte an den Grenzen des Integrals gegeben, so können diese nicht verändert werden. Mathematisch bedeutet das

$$[\delta f(x)]_{x=a} = 0, \tag{2.9}$$
$$[\delta f(x)]_{x=b} = 0. \tag{2.10}$$

Die Operationen Variation und Integration sind kommutativ:

$$\delta \int_a^b F(y, y', x)dx = \int_a^b \bar{F}(y, y', x)dx - \int_a^b F(y, y', x)dx = \int_a^b \delta F(y, y', x)dx. \tag{2.11}$$

Auch Variation und Differentiation erfüllen das Kommutativgesetz:

$$\frac{d}{dx}\delta y = \delta\frac{d}{dx}y. \tag{2.12}$$

Die erstgenannte Eigenschaft ermöglicht, dass anstatt der Variation des Integrals δI, die Variation des Integranden

$$\delta F(y, y', x) = F(y + \epsilon\phi, y' + \epsilon\phi', x) - F(y, y', x) = \epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi + \frac{\partial F}{\partial y'}\phi'\right) \tag{2.13}$$

untersucht werden kann. Die Variation des Integrals

$$\frac{\delta I}{\epsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi + \frac{\partial F}{\partial y'}\phi'\right) \tag{2.14}$$

entzieht sich jedoch weiterer Interpretationen, weil $\phi(x)$ und $\phi'(x)$ abhängig sind. Partielle Integration des zweiten Termes aus (2.13)

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\phi' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\phi\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\phi dx\right)$$

lässt (2.14) umschreiben. Der Term $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\phi\right]_a^b$ entfällt, da ϕ an den Intervallgrenzen null ist. Die resultierende Gleichung

$$\frac{\delta I}{\epsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\phi dx \tag{2.15}$$

beinhaltet bereits einen Teil der Euler-Lagrange-Gleichung

$$E(x) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}. \tag{2.16}$$

Wenn δI null gleicht, nimmt das Integral einen stationären Wert an. Dieser Fall tritt im gesamten Intervall für $E(x) = 0$ ein. Diese Feststellung führt zur Differentialgleichung von Euler und Lagrange [Lan57]:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{2.17}$$

Eine eindeutige Lösung dieser Gleichung für y macht das dazugehörige Integral zu einem stationären Wert. Die Art des Extremwertes muss für die konkrete Problemstellung untersucht werden.

Bemerkung 1 *Für den Fall, dass das Integral auch Ableitungen zweiter Ordnung besitzt*

$$I = \int_a^b F(y, y', y'', x)dx \tag{2.18}$$

entsteht folgende notwendige Bedingung für einen Extremwert von I:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \tag{2.19}$$

3. Modellbildung

Der Kern vieler Regelungen ist ein Modell. Laut [Lun13] bildet dieses in der Regelungstechnik das Verhalten eines realen Vorgangs ab. Ziel der Modellbildung ist eine mathematische Systembeschreibung, die für eine festgelegte Regelungsaufgabe ausreichend genau und umfassend ist. Modelle der Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer gibt es in großer Vielfalt. Diese unterscheiden sich meist in den grundlegenden Vereinfachungen. Die Herleitung verschiedener Modelle kann man in [Sch09, S.432 ff.] studieren. Für Regelungen der Asynchronmaschine wird bevorzugt ein Modell in umlaufenden Rotorflusskoordinaten verwendet. Ein paar grundsätzliche Aspekte der Herleitung werden nachfolgend betrachtet um alle Limitierungen des entworfenen Modells zu erwähnen.

3.1. Raumzeigergleichungen der Asynchronmaschine

Zunächst kann durch eine Raumzeigerdarstellung das Gleichungssystem der Asynchronmaschine reduziert werden. Károly Pál Kovács definierte erstmals Raumzeiger (Nachzulesen in [JKK75]). Manuel Kühner erklärte den Begriff Raumzeiger schlüssig in [Küh07]:

> Raumzeiger bzw. komplexe Raumzeiger sind ein mathematisches Hilfsmittel zur eleganten Beschreibung von Drei-Größen-Systemen und räumlich sinusförmig (rotatorisch) verteilten Größen und eignen sich daher unter bestimmten Voraussetzungen beispielsweise zur Modellierung und ggf. Regelung der dynamischen Vorgänge in Umrichtern, Drehstromantriebssystemen und im Bereich der Energieversorgung.

Die zugehörige mathematische Beschreibung eines beliebigen Raumzeigers $\underline{Q}(t)$[1] ist

$$\underline{Q} = \frac{2}{3}\left(u(t) + \underline{a}v(t) + \underline{a}^2 w(t)\right), \tag{3.1}$$

wobei eine komplexe Größe $\underline{a} = \mathrm{e}^{j\frac{2}{3}\pi}$ mit den Zeitfunktionen $v(t)$ und $w(t)$ multipliziert wird. Jeder Raumzeiger ist in seinen Realteil und Imaginärteil zerlegbar. Ausführlichere Betrachtungen der Raumzeigertheorie sind u. a. in [Sch13] enthalten. Der Vorschlag Kovács (3.1) ist die Grundlage für die Projektion des natürlichen Gleichungssystems in eine reduzierte Variante in Raumzeigerdarstellung (siehe Gleichungen (3.2)). Für eine eindeutige Rücktransformation einer Raumzeigergröße in die Komponenten des Dreiphasensystems muss eine weitere Bedingung gegeben sein. Im Fall der Ströme des Dreigrößensystems wird vorausgesetzt, dass sie in der Summe Null ergeben. Diese Bedingung ist gewährleistet, wenn kein Nullleiter in der Maschine existiert.

Des Weiteren legt man das Koordinatensystem fest, in das die natürlichen Funktionen projiziert werden. Am leichtesten vorstellbar ist ein statorfestes Koordinatensystem, dessen reelle Achse α fest an einer Spulenachse des Stators (z. B. an der Phase U) ausgerichtet ist. Alle Größen, die in diesen Koordinaten angegeben werden, erhalten den hochgestellten Index s. Im weiteren Verlauf werden noch weitere Koordinatensysteme für die Herleitung des Modells benötigt: Ein läuferfestes Koordinatensystem mit dem hochgestellten Index l und ein rotorflussfestes Koordinatensystem mit dem hochgestellten Index r.

Ausgehend von den allgemeinen Spannungs-Differentialgleichungen der Drehfeldmaschine gilt für den Statorkreis in Raumzeigergrößen

$$\underline{U}_\mathrm{S}^\mathrm{s} = R_\mathrm{S}\underline{I}_\mathrm{S}^\mathrm{s} + \dot{\underline{\Psi}}_\mathrm{S}^\mathrm{s} \tag{3.2a}$$

und für den Rotorkreis

$$\underline{U}_\mathrm{R}^\mathrm{l} = R_\mathrm{R}\underline{I}_\mathrm{R}^\mathrm{l} + \dot{\underline{\Psi}}_\mathrm{R}^\mathrm{l} = 0. \tag{3.2b}$$

Die Größen $R_\mathrm{S}, R_\mathrm{R}$ bezeichnen den ohmschen Widerstand einer Statorphase und den ohmschen Rotorwiderstand, bereits transformiert auf die Statorseite. Generell soll gelten, dass alle Rotorgrößen auf den Stator umgerechnet sind. Die anderen Größen $\underline{U}_\mathrm{S}^\mathrm{s}$, $\underline{I}_\mathrm{S}^\mathrm{s}$, $\underline{\Psi}_\mathrm{S}^\mathrm{s}$, $\underline{U}_\mathrm{R}^\mathrm{l}$,

[1] Raumzeiger werden im Weiteren nicht explizit als zeitabhängig ausgewiesen. Die mathematische Abbildung der zeitabhängigen Funktionen gilt für jeden Raumzeiger. Es genügt die Notation $\underline{Q}$.

$\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}}$, $\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}}$ sind die Raumzeiger der Statorspannung, des Statorstromes, der Statorflussverkettung, der Rotorspannung, des Rotorstromes und der Rotorflussverkettung bezüglich ihres angegebenen Koordinatensystems. Für eine ASM mit Kurzschlussläufer gilt $\underline{U}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}} = 0$. Die Gleichungen der Flussverkettungen ergeben sich aus den Flussanteilen der Stator- und Rotorwicklungen zu

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + L_{\mathrm{M}}\mathrm{e}^{j\beta}\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}}, \tag{3.3}$$

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}} = L_{\mathrm{M}}\mathrm{e}^{-j\beta}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + L_{\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}}. \tag{3.4}$$

Die Größen L_{S} und L_{R} stehen für die Eigeninduktivitäten des Stators und Rotors, L_{M} bezeichnet die Gegeninduktivität aus Stator und Rotor und β gibt den Winkel zwischen statorfestem und rotorfestem Koordinatensystem an.

Um eine einheitliche Beschreibung in einem Koordinatensystem zu erhalten, müssen die Größen von einem in das andere Koordinatensystem transformiert werden. In diesem Fall ist zunächst die Transformation der rotorfesten Größen in das statorfeste Koordinatensystem erstrebenswert. Zum Verständnis der Transformation ist diese exemplarisch in Abbildung 3.1 gezeigt.

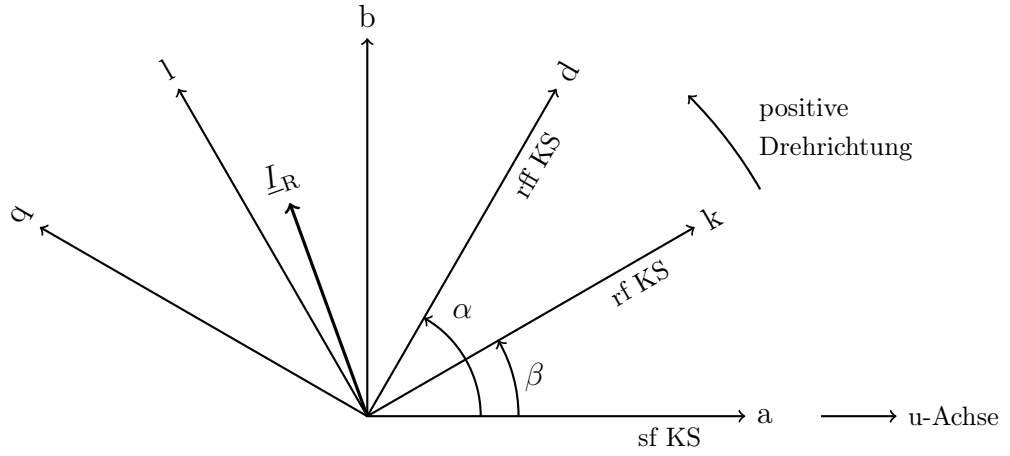


Abbildung 3.1.: Der Raumzeiger I_{R} in drei Koordinatensystemen(KS): rotorfest (rf), statorfest (sf), rotorflussfest (rff). Die Beziehungen sind durch die Winkel eindeutig zugeordnet.

Es gilt für die Transformation:

$$\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{l}} = \underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{e}^{-j\beta}. \tag{3.5}$$

Nach dem Anwenden der Vorschrift erhält man die Systemgleichungen der Asynchronmaschine in statorfesten Koordinaten. Die Gleichungen für die Spannungen

$$\underline{U}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} = R_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + \dot{\underline{\Psi}}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}, \tag{3.6a}$$

$$0 = R_{\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} + \dot{\underline{\Psi}}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} - j\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} \cdot \underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \tag{3.6b}$$

und die Gleichungen für die Flussverkettungen

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + L_{\mathrm{M}}\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}, \tag{3.6c}$$

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} = L_{\mathrm{M}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + L_{\mathrm{R}}\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} \tag{3.6d}$$

geben die elektrischen Beziehungen in der Maschine an. Die Drehmomentgleichung

$$M_{\mathrm{M}} = \frac{3}{2}p\,\mathrm{Im}\left\{\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}*}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}\right\} \tag{3.6e}$$

und Drehmomentbilanz

$$J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = M_{\mathrm{M}} - M_{\mathrm{L}} \tag{3.6f}$$

sind fester Bestandteil der elektromechanischen Seite der Asynchronmaschine. Für die Winkelgeschwindigkeit des rotorfesten Koordinatensystems gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = p\omega_{\mathrm{m}}. \tag{3.6g}$$

3.2. Zustandsdarstellung des Modells

Die klassische Zustandsdarstellung ist ein System aus Differentialgleichungen erster Ordnung [Lun13, S.72 ff.]. Dazu werden die vorherigen Gleichungen (3.6) bearbeitet, so dass Differentialgleichungen erster Ordnung entstehen.

Die Definition des Rotorstroms

$$\underline{I}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} = \frac{1}{L_{\mathrm{M}}}\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} - \frac{L_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{M}}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} \tag{3.7}$$

aus (3.6c) in (3.6d) eingesetzt, ergibt

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} = \sigma L_{\mathrm{S}}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}}\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}, \tag{3.8}$$

wobei die Größe $\sigma = 1 - \frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{S}}L_{\mathrm{R}}}$ aus der Fachliteratur als Streukoeffizient bekannt ist. Die letzte Modellgleichung (3.6g) ersetzt die Ableitung des elektrischen Rotorwinkels in (3.6b) und entfällt, denn der Winkel β ist keine Systemgröße des Modells und daher seine Bestimmung nicht notwendig. Das Einsetzen der Größen (3.7) und (3.8) in (3.6a) und in (3.6b) führt zu den Differentialgleichungen (3.10a) und (3.10b). Das Drehmoment der Maschine soll sich ebenfalls aus den Komponenten Ständerstrom und Rotorfluss bestimmen. Daher wird $\underline{\Psi}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}$ durch (3.8) ersetzt und man bekommt

$$M_{\mathrm{M}} = \frac{3}{2}\frac{pL_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{Im}\left\{\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}*}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}\right\}. \tag{3.9}$$

Setzt man schließlich (3.9) in die Drehmomentbilanz (3.6f) ein, erhält man die dritte Differentialgleichung für die Zustandsdarstellung. Es folgen die drei hergeleiteten Zustandsgleichungen zusammengefasst im statorfesten Koordinatensystem:

$$\dot{\underline{I}}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} = -\frac{1}{\tau_1}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}} + \frac{1-\sigma}{\sigma L_{\mathrm{M}}\tau_2}\left(1 - jp\omega_{\mathrm{m}}\tau_2\right)\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} + \frac{1}{\sigma L_{\mathrm{S}}}\underline{U}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}, \tag{3.10a}$$

$$\dot{\underline{\Psi}}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} = -\left(\frac{1}{\tau_2} - jp\omega_{\mathrm{m}}\right)\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}, \tag{3.10b}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}p}{L_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{Im}\left\{\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}*}\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}\right\} - M_{\mathrm{L}}\right). \tag{3.10c}$$

Durch Einführen von den Zeitkonstanten $\tau_2 = \frac{L_{\mathrm{R}}}{R_{\mathrm{R}}}$ und $\tau_1^{-1} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{R_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{S}}} + \frac{R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}}\left(1-\sigma\right)\right)$ wurde die Darstellung übersichtlicher gemacht.

In der klassischen Zustandsdarstellung sind die Ableitungen der linken Seite des Gleichungssystems gleichbedeutend mit den Ableitungen der Zustandsgrößen. Das ersichtliche Zustandstupel ist demnach $\boldsymbol{x} = \{\underline{I}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{s}}, \underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}}, \omega_{\mathrm{m}}\}$. Zum Lösen des Gleichungssystems sind weniger Modellgrößen in (3.10) erforderlich, um das Systemverhalten zu beschreiben. Die Zustandsdarstellung ändert nichts am System und erhöht die Überschaubarkeit.

Das Zustandsmodell in statorfesten Koordinaten ist nach Aussage von [Sch09, S.473] wesentlich komplizierter als in anderen verbreiteten Koordinatensystemen der Asynchronmaschine. Speziell die Umsetzung des Signalflussplans in einer Simulation ist aufwendiger. Um die Modellproblematik im Weiteren zu verringern, erfolgt im nächsten Abschnitt eine Transformation in ein rotorflussfestes orthogonales Koordinatensystem mit den Achsen d und q. Die Lage der d-Achse entspricht der Orientierung des Raumzeigers der Rotorflussverkettung.

3.3. Modell im rotorflussfesten d-q-Koordinatensystem

Jeder Raumzeiger ist im Rotorflusskoordinatensystem in seine Komponenten zerlegbar. Es gilt

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{r}} = \Psi_{\mathrm{Rd}} + j\Psi_{\mathrm{Rq}}. \tag{3.11}$$

Der hochgestellte Index r kennzeichnet einen Raumzeiger im d-q-Koordinatensystem. Die Größen Ψ_{Rd} und Ψ_{Rq} sind Real- und Imaginärteil entsprechend (3.11). Durch die Orientierung der d-Achse an der Rotorflussverkettung gilt außerdem

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{r}} = \Psi_{\mathrm{Rd}}, \tag{3.12a}$$

$$\Psi_{\mathrm{Rq}} = 0, \tag{3.12b}$$

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rq}} = 0. \tag{3.12c}$$

Die Übertragung der Systemgrößen in das d-q-Koordinatensystem erfolgt mit der Vorschrift

$$\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{s}} = \underline{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{e}^{j\alpha}. \tag{3.13}$$

Der Winkel α ist der Umlaufwinkel der Rotorflussverkettung gegenüber dem raumfesten Statorkoordinatensystem. Im Weiteren entfällt die dauerhafte Kennzeichnung der Größen im rotorflussorientierten Koordinatensystem durch den Index r[2] zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit. Die Transformation (3.13) überführt die Gleichungsgruppe (3.10) in das

[2]Eine Ausnahme bildet das Auftreten von Größen aus verschiedenen Koordinatensystemen in einer Gleichung.

rotorflussfeste Koordinatensystem:

$$\underline{\dot{I}}_{\mathrm{S}} = -\left(\frac{1}{\tau_1} + j\dot{\alpha}\right)\underline{I}_{\mathrm{S}} + \frac{1-\sigma}{\sigma M \tau_2}\left(1 - jp\omega_{\mathrm{m}}\tau_2\right)\underline{\Psi}_{\mathrm{R}} + \frac{1}{\sigma L_{\mathrm{S}}}\underline{U}_{\mathrm{S}}, \tag{3.14a}$$

$$\underline{\dot{\Psi}}_{\mathrm{R}} = -\left(\frac{1}{\tau_2} - jp\omega_{\mathrm{m}}\right)\underline{\Psi}_{\mathrm{R}} - j\dot{\alpha}\underline{\Psi}_{\mathrm{R}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\underline{I}_{\mathrm{S}}, \tag{3.14b}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}p}{L_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\underline{\Psi}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{j\alpha}\right)^{*}\underline{I}_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{j\alpha}\right\} - M_{\mathrm{L}}\right), \tag{3.14c}$$

$$\dot{\alpha} = \omega_{\alpha}, \tag{3.14d}$$

wobei die Gleichung (3.14d) eine definitorische Festlegung für die Winkelgeschwindigkeit der Rotorflussverkettung gegenüber dem raumfesten Statorkoordinatensystem ist. Das Gleichungssystem (3.14) mit den komplexen Raumzeigergrößen lässt sich in Realteil und Imaginärteil aufspalten. Unter der Verwendung der Definition (3.11) wird weiterhin die Bezeichung $\mathrm{Im}\{\}$ und $\mathrm{Re}\{\}$ entfallen und der Realteil mit dem Index d und der Imaginärteil mit dem Index q gekennzeichnet. Durch Anwendung der Festlegungen (3.12) und Trennen in Real- und Imaginärteil der Gleichungen, sowie Einsetzen von (3.14d) ergibt sich das vollständige Gleichungssystem

$$\dot{I}_{\mathrm{Sd}} = -\frac{1}{\tau_1}I_{\mathrm{Sd}} + \omega_{\alpha}I_{\mathrm{Sq}} + \frac{1-\sigma}{\sigma L_{\mathrm{M}}\tau_2}\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{1}{\sigma L_{\mathrm{S}}}U_{\mathrm{Sd}}, \tag{3.15a}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Sq}} = -\frac{1}{\tau_1}I_{\mathrm{Sq}} - \omega_{\alpha}I_{\mathrm{Sd}} + \frac{1-\sigma}{\sigma L_{\mathrm{M}}}p\omega_{\mathrm{m}}\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{1}{\sigma L_{\mathrm{S}}}U_{\mathrm{Sq}}, \tag{3.15b}$$

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = -\frac{1}{\tau_2}\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}I_{\mathrm{Sd}}, \tag{3.15c}$$

$$\omega_{\alpha} - p\omega_{\mathrm{m}} = \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\frac{I_{\mathrm{Sq}}}{\Psi_{\mathrm{Rd}}}, \tag{3.15d}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}p}{L_{\mathrm{R}}}\Psi_{\mathrm{Rd}}I_{\mathrm{Sq}} - M_{\mathrm{L}}\right). \tag{3.15e}$$

Bemerkung 2 *Die Information zur Ermittlung des Rotorflusswinkels α geht in* (3.15) *verloren. Hier soll darauf hingewiesen werden, dass α dennoch für die Koordinatentransformation beim Regelungsentwurf benötigt wird, und daher auf* (3.14d) *später in Kapitel 7 zurückgegriffen wird. Allerdings unter der Bedingung, dass ein Anfangswert α bekannt ist.*

3.4. Modellreduktion im rotorflussfesten Koordinatensystem

Für heutige Anwendungen wird oftmals das Reglersystem über ein reduziertes Modell entwickelt. Dazu wird die Betrachtung von (3.10a) vernachlässigt. Ein Vergleich der Ergebnisse aus [WR99] mit dem reduzierten Modell und [SMCR93] mit einem vollständigeren Modell zeigt, dass der Modellierungsfehler sehr klein ist an der gleichen Testmaschine. Beide Arbeiten setzen sich mit der Anwendung einer flachheitsbasierten Regelung auseinander. Der Hintergrund für diese Untersuchung hängt mit heutigen Umrichtern zusammen. Diese enthalten meist eine implementierte Ständerstromregelung. Die Verzögerung im Regelkreis durch die unterlagerte Regelung der Ständerstromkomponenten wird als gering betrachtet.

Die Gleichungen

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = -\frac{1}{\tau_2}\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2} I_{\mathrm{Sd}}, \tag{3.16a}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}} p}{L_{\mathrm{R}}}\Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sq}} - M_{\mathrm{L}}\right), \tag{3.16b}$$

$$\omega_{\alpha} = p\omega_{\mathrm{m}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\frac{I_{\mathrm{Sq}}}{\Psi_{\mathrm{Rd}}}. \tag{3.16c}$$

repräsentieren das teilweise reduzierte Modell. Die Gleichung (3.16c) definiert ausschließlich die Rotorflusswinkelgeschwindigkeit ω_{α} und trägt nicht weiter zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens der Asynchronmaschine bei. So kann in einem zweiten Reduktionsschritt diese Gleichung vernachlässigt werden. Damit beschränkt sich das endgültig reduzierte Modell zur Beschreibung des Systemverhaltens auf zwei Gleichungen:

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = -\frac{1}{\tau_2}\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2} I_{\mathrm{Sd}}, \tag{3.17a}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}} p}{L_{\mathrm{R}}}\Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sq}} - M_{\mathrm{L}}\right). \tag{3.17b}$$

Der Rotorflussregler und Drehzahlregler werden hauptsächlich auf Grundlage des reduzierten Modells der Asynchronmaschine dimensioniert. Darauf wird in Kapitel 7 näher eingegangen.

4. Flachheitsanalyse

4.1. Definition Flachheit

Das Vorlesungsskript [Rud98] definiert Flachheit folgendermaßen:

Ein nichtlineares System

$$S_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \ldots, z^{(\sigma_i)}) = 0, \quad i = 1, \ldots, q \tag{4.1}$$

heißt *(differentiell) flach*, falls ein m-Tupel $(y_1, \ldots, y_m)$ von Funktionen der Systemgrößen z_i, $i = 1, \ldots, s$ und ihrer Ableitungen existiert, d. h.

$$y_i = \phi_i(z, \dot{z}, \ldots, z^{(\beta_i)}), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

für das folgende zwei Beziehungen erfüllt sind:

(I) Es existiert keine Differentialgleichung

$$R(y, \dot{y}, \ldots, y^{(\gamma)}) = 0. \tag{4.3}$$

Die Komponenten von y sind also nicht über eine Differentialgleichung in y verkoppelt und es genügt auch keine der Komponenten y_i von y einer Dgl. in y_i allein; man sagt, y ist differentiell unabhängig.

(II) Alle Systemgrößen, d. h. die Komponenten von z, können ihrerseits durch y und dessen Zeitableitungen ausgedrückt werden:

$$z_i = \psi_i(y, \dot{y}, \ldots, y^{(\delta_i)}), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{4.4}$$

Gleiches gilt damit für alle Ableitungen von z und sämtliche Funktionen dieser Größen.

In diesem Fall wird y als *flacher Ausgang* des Systems bezeichnet.

Die Eigenschaft des flachen Ausgangs ermöglicht eine Berechnung des zeitlichen Verlaufs aller Systemgrößen durch die Komponenten des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen (siehe (4.4)). Eine Regelung, die die Flachheit eines Systems ausnutzt, profitiert stark davon in ihrem Regelverhalten: Wenn möglich wird der flache Ausgang oft so gewählt, dass Komponenten von y mit der Regelgröße identisch sind oder dass diese auf einfachem analytischen Weg aus y berechenbar ist. Der Vorteil: Das gewünschte Verhalten des Systemausgangs kann direkt durch Solltrajektorien beschrieben werden. Im Fall einer Steuerung sind alle benötigten Systemgrößen, sowie die gewählten Eingangsgrößen, direkt aus dem Verlauf der Solltrajektorien berechenbar. Bei einer Regelung sind dementsprechend Stellgrößen berechenbar und die Regler dadurch schneller. Speziell bei dynamischen Vorgaben, wie in dieser Arbeit vorgesehen, bietet sich eine flachheitsbasierte Regelung an. Allerdings muss das System dafür nachweislich flach sein.

4.2. Flachheit des vollständigen Modells

Flachheit gilt nicht im Allgemeinen für nichtlineare Systeme. Üblicherweise erfolgt der Nachweis durch die Überprüfung der Bedingungen. Unter Wahl eines flachen Ausgangs y muss gezeigt werden, dass (4.3) und (4.4) gelten. Die Wahl des flachen Ausgangs kann empirisch erfolgen und durch Test und Erfolg bestätigt werden oder es kann durch eine geschickte Untersuchung der Systemgleichungen auf einen flachen Ausgang geschlossen werden:

Bei dem vollständigen Modell der betrachteten Asynchronmaschine handelt es sich um das Gleichungssystem (3.15). Die Anzahl der Gleichungen beträgt $q = 5$ und es gibt $s = 7$ zeitabhängige Systemgrößen:

$$x = (I_{\mathrm{Sd}}, I_{\mathrm{Sq}}, \Psi_{\mathrm{Rd}}, U_{\mathrm{Sd}}, U_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}}, \omega_{\alpha}). \tag{4.5}$$

Damit resultiert die Anzahl linear unabhängiger Größen m aus dem Zusammenhang $m = s - q = 2$. Das bedeutet, der flache Ausgang besitzt zwei Komponenten. Im nächsten Schritt versucht man schrittweise Systemgrößen zu eliminieren. Die Systemgrößen U_{Sd}

und U_{Sq} treten ausschließlich in den Gleichungen (3.15a) und (3.15b) auf. Diese Gleichungen können somit als Definitionsgleichungen für die Statorspannung aufgefasst werden:

$$U_{\mathrm{Sd}} = -(\sigma L_{\mathrm{S}}) \left(-\frac{1}{\tau_1} I_{\mathrm{Sd}} + \omega_\alpha I_{\mathrm{Sq}} + \frac{1-\sigma}{\sigma L_{\mathrm{M}} \tau_2} \Psi_{\mathrm{Rd}} - \dot{I}_{\mathrm{Sd}} \right), \tag{4.6}$$

$$U_{\mathrm{Sq}} = -(\sigma L_{\mathrm{S}}) \left(-\frac{1}{\tau_1} I_{\mathrm{Sq}} - \omega_\alpha I_{\mathrm{Sd}} + \frac{1-\sigma}{\sigma L_{\mathrm{M}}} p \omega_{\mathrm{m}} \Psi_{\mathrm{Rd}} - \dot{I}_{\mathrm{Sq}} \right). \tag{4.7}$$

Das verbliebene System

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = -\frac{1}{\tau_2} \Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2} I_{\mathrm{Sd}} \tag{4.8}$$

$$\omega_\alpha - p\omega_{\mathrm{m}} = \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2} \frac{I_{\mathrm{Sq}}}{\Psi_{\mathrm{Rd}}} \tag{4.9}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{J} \left(\frac{3}{2} \frac{L_{\mathrm{M}} p}{L_{\mathrm{R}}} \Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sq}} - M_{\mathrm{L}} \right) \tag{4.10}$$

umfasst nur noch drei Gleichungen und fünf Systemgrößen und ist klein genug um es zu diskutieren. Gleichung (4.8) beinhaltet nur die zeitabhängigen Größen I_{Sd}, Ψ_{Rd} und $\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}$. Wegen (4.3) dürfen I_{Sd} und Ψ_{Rd} nicht gleichzeitig als Komponenten des flachen Ausgangs gewählt werden. Damit kann Ψ_{Rd} als eine Komponente bereits festgelegt werden, sonst wäre $I_{\mathrm{Sd}} = \frac{1}{L_{\mathrm{M}}} \Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{\tau_2}{L_{\mathrm{M}}} \dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}$ nicht berechenbar. Als andere Komponente bietet sich ω_{m} an, weil bei der Wahl von I_{Sq} Bedingung (4.4) verletzt wird:

$$\omega_{\mathrm{m}} = \int \frac{1}{J} \left(\frac{3}{2} \frac{L_{\mathrm{M}} p}{L_{\mathrm{R}}} y_1 y_2 - M_{\mathrm{L}} \right) \mathrm{d}t. \tag{4.11}$$

In dem Fall lässt sich ω_{m} nur durch Integration aus I_{Sq} ermitteln. Die kurze Diskussion des Gleichungssystems führt zu zwei plausiblen Ausgängen: Der bereits diskutierte Ausgang $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ und ein davon abgeleiteter Ausgang $y = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$. Der Zweite beruht auf der Idee Ψ_{Rd} mittels (4.10) durch I_{Sq} zu definieren.

4.2.1. Beweis des flachen Ausgangs $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$

Mit der ersten Wahl von $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}}) = (y_1, y_2)$ als Freiheitsgrade des Modells erhält man

$$I_{\mathrm{Sq}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}p}\frac{1}{y_1}\left(J\dot{y}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) = \psi_1(y_1, \dot{y}_2), \tag{4.12}$$

$$I_{\mathrm{Sd}} = \frac{1}{L_{\mathrm{M}}}y_1 + \frac{\tau_2}{L_{\mathrm{M}}}\dot{y}_1 = \psi_2(y_1, \dot{y}_1), \tag{4.13}$$

$$\omega_\alpha = \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\frac{\psi_1(y_1, \dot{y}_2)}{y_1} + py_2 = \psi_3(y_1, y_2, \dot{y}_2), \tag{4.14}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Sq}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}p}\left(\frac{\dot{y}_1}{y_1^2}\left(J\dot{y}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + J\frac{\ddot{y}_2}{y_1}\right) = \psi_4(y_1, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2), \tag{4.15}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Sd}} = \frac{1}{L_{\mathrm{M}}}\left(\dot{y}_1 + \tau_2\ddot{y}_1\right) = \psi_5(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1). \tag{4.16}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.12) bis (4.16) in (4.6) und (4.7) resultieren die Spannungsgrößen zu

$$U_{\mathrm{Sd}} = \psi_6(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2), \tag{4.17}$$

$$U_{\mathrm{Sq}} = \psi_7(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2). \tag{4.18}$$

Es konnte also gezeigt werden, dass alle Systemgrößen durch den flachen Ausgang $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ und dessen Ableitungen berechnet werden können und es gibt keine Differentialgleichung in den Komponenten des flachen Ausgangs alleine. Nach Definition handelt es sich demnach um ein flaches System.

4.2.2. Beweis des flachen Ausgangs $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$

Mit der zweiten Wahl von $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}}) = (z_1, z_2)$ erhält man

$$\Psi_{\mathrm{Rd}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}p}\frac{1}{z_1}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) = \psi_1(z_1, \dot{z}_2) \tag{4.19}$$

$$I_{\mathrm{Sd}} = \frac{1}{L_{\mathrm{M}}}\psi_1(z_1, \dot{z}_2) + \frac{\tau_2}{L_{\mathrm{M}}}\dot{\psi}_1(z_1, \dot{z}_2) = \psi_2(z_1, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \ddot{z}_2) \tag{4.20}$$

$$\omega_\alpha = \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_2}\frac{z_1}{\psi_1(z_1, \dot{z}z_2)} + pz_2 = \psi_3(z_1, z_2, \dot{z}_2) \tag{4.21}$$

Mit Hilfe von

$$\dot{I}_{\mathrm{Sq}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}p}\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1^2}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + J\frac{\ddot{z}_2}{z_1}\right) = \psi_4(z_1, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \ddot{z}_2) \tag{4.22}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Sd}} = \psi_5(z_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_1, \dot{z}_2, \ddot{z}_2, z_2^{(3)}) \tag{4.23}$$

und Einsetzen der Gleichungen (4.22) bis (4.23) in (4.6) und (4.7) resultieren die Spannungsgrößen zu den Funktionen

$$U_{\mathrm{Sd}} = \psi_6(z_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, \ddot{z}_2, z_2^{(3)}), \tag{4.24}$$

$$U_{\mathrm{Sq}} = \psi_7(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, \ddot{z}_2). \tag{4.25}$$

Es konnte ebenfalls gezeigt werden, dass alle Systemgrößen durch die Systemgrößen $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ und deren Ableitungen berechnet werden können und es gibt keine Differentialgleichung in den Komponenten des flachen Ausgangs alleine. Nach Definition handelt es sich demnach um einen weiteren flachen Ausgang.

4.2.3. Auswahl eines flachen Ausgangs

Die Ausgänge $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ und $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ sind nachweislich flach. Es muss folglich bewertet werden, welcher Ausgang sich besser für die Realisierung einer dynamisch effizienten Folgeregelung eignet. Folgende Punkte tragen zur Urteilsbildung bei:

1. Ein Unterschied ist schon im Beweis erkennbar: Die Berechnung der Systemgrößen benötigt eine höhere Ableitungsordnung des flachen Ausgangs, wenn $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ gewählt wird. Es gilt, dass die Solltrajektorie bis zur benötigten Ableitungsordnung stetig differenzierbar sein muss. In Konsequenz muss die Trajektorienfunktion beispielsweise durch ein Polynom höherer Ordnung dargestellt werden.

2. Die Verlustoptimierung im dynamischen Betrieb der Asynchronmaschine ist ein kritischer Punkt dieser Arbeit. Die Anwendung der Extremwertbedingung von Euler-Lagrange (5.19) führt für beide Ausgänge zu nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Herleitungen befinden sich im Kapitel 5 und im Anhang A. Herkömmliche analytische Ansätze führen für beide Gleichungen zu keiner Lösung. Die Gleichung im Anhang (A.27) des Ausgangs $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ besitzt ähnliche Terme und darüber hinaus noch einige mehr. Daher lässt sich auf größeren Aufwand zur Berechnung einer numerischen Lösung schließen.

3. Der Fluss Ψ_{Rd} ist bereits in den wissenschaftlichen Arbeiten [WR99, SDK13] als Komponente des flachen Ausgangs $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ zur Verlustminimierung verwendet wurden.

Die Wahl des flachen Ausgangs fällt hinsichtlich der geringeren Anforderungen an stetige Differenzierbarkeit, der numerischen Lösungsumstände und bestehender Publikationen auf $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$, der alleinig in allen weiteren Ausführungen verwendet wird.

5. Verlustmodell des Antriebs

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Regelung zu entwerfen, die sowohl in dynamischen und statischen Betriebsregimes die Leistungsverluste, kurz Verluste, minimiert. Um dieses Ziel zu erreichen, wird ein geeignetes Verlustmodell als Maßstab der Minimierung eingeführt.

Verluste treten im gesamten Antriebsstrang auf, dass heißt eine vollständige Beurteilung schließt die Maschine und den Umrichter ein. Flemming Abrahamsen hat in einer Veröffentlichung von 2001 eine Verlustoptimierung eines Antriebes mit und ohne Umrichterverluste durchgeführt. Das Experiment wurde in verschiedenen Leistungsklassen wiederholt. Ergebnis: Die Betrachtung der Verluste des Motors reicht bei Maschinen bis 10 kW aus. Die Maschinenverluste decken sich experimentell mit dem Verlustminimum des gesamten Antriebes, wobei außerdem der Anteil der Umrichterverluste sehr gering ist. Hinsichtlich des Teststandes mit einem 4 kW-Asynchronmotor werden die Umrichterverluste in das Verlustmodell nicht einbezogen [ABPT01].

5.1. Überblick der Maschinenverluste

Da die Entwicklung eines Verlustmodells für den Umrichter entfällt, verbleibt die Beurteilung der Maschinenseite. Anfänglich werden zwei Fragen geklärt: Welche Komponenten der Leistungsverluste einer ASM sind zum Modellentwurf der Verluste nötig? Und wie können diese mit Hilfe der Systemgrößen des Modells (3.17) bestimmt werden?

Grundsätzlich treten folgende Verluste in einer Asynchronmaschine mit Käfigläufer auf [MP06, MVP08]:

- Wicklungsverluste durch Ströme, die im unmittelbaren Zusammenhang mit dem eigentlichen Energiewandlungsprozess stehen
- Ummagnetisierungsverluste im Magnetkreis
- Reibungsverluste verursacht durch Luft- und Lagerreibung
- zusätzliche Verluste

Die Wicklungsverluste sind normalerweise ein Teil der Stromwärmeverluste bzw. Kupferverluste, zu denen noch Bürstenübergangs- und Erregerverluste gehören. Die beiden letzteren Anteile werden nicht aufgeführt, weil die ASM in dieser Ausführung weder Erregerwicklung noch Bürsten zur Stromkommutierung aufweist. Ummagnetisierungsverluste teilen sich in Wirbelstromverluste und Hystereseverluste auf, im Folgenden adressiert mit Eisenverlusten. Die Erläuterung zu den zusätzlichen Verlusten geben Müller und Ponick in [MP06, S.213]:

> Das sind Verluste, die sich nicht ohne weiteres lokalisieren lassen oder deren Ursache nicht einfach erfassbar bzw. nicht unmittelbar mit dem auszunutzenden Wirkungsmechanismus verknüpft ist. Sie werden z.B. durch Stromverdrängungserscheinungen, durch Wirbelströme in tragenden und abdeckenden Konstruktionsteilen, durch Wirkung unerwünschter Komponenten des Luftspaltfelds, als Folge der Kurzschlussströme kommutierender Spulen im Kommutatoranker u. a. hervorgerufen.

Die Autoren von [KG83] teilen die beschriebenen Verluste anhand der modellbasierten Berechnungen in zwei Gruppen. In der ersten Gruppe sind die Kupfer- und Ummagnetisierungsverluste, weil diese von bestimmten Systemgrößen des Modells abhängig sind, die eine Manipulation durch eine Regelung erlauben. Während die zweite Gruppe die restlichen Verluste beinhaltet. Diese sind schwer von einer Regelung zu beeinflussen: Reibungsverluste sind vordergründig von der Drehzahl abhängig. Bei einem extern festgelegten Betriebsregime gibt es durch Regelung keine Möglichkeit zur Reduktion der Reibungsverluste. Die analytische Beschreibung der zusätzlichen Verluste ist aufwendig und deren Genauigkeit fraglich. Entsprechend der vorgenommenen Einteilung zählen Stromwärmeverluste durch Oberschwingungen der speisenden Ströme zu den zusätzlichen Verlusten. Die Arbeit [Abr00] zeigt, dass kein eindeutiger analytischer Zusammenhang zwischen Oberschwingungsstromwärmeverlusten (meist großer Anteil der zusätzlichen Verluste) und Systemgrößen vorliegt. Schlussfolgernd beruht die weitere Entwicklung des

Verlustmodells ausschließlich auf der ersten Gruppe der Verluste (Wicklungs- und Ummagnetisierungsverluste).

5.2. Relevante Verluste für die Regelung der Asynchronmaschine

Die Wicklungsverluste im Stator werden analytisch mit

$$P_{\mathrm{cu\,S}} = 3R_{\mathrm{S}}I_{\mathrm{Ph\,eff}}^2 = 3R_{\mathrm{S}}\left(\frac{\sqrt{I_{\mathrm{Sd}}^2 + I_{\mathrm{Sq}}^2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2}R_{\mathrm{S}}(I_{\mathrm{Sd}}^2 + I_{\mathrm{Sq}}^2) \tag{5.1a}$$

erfasst. Die Kupferverluste im Rotor berechnen sich analog zu (5.1a):

(5.1b)

$$P_{\mathrm{cu\,R}} = \frac{3}{2}R_{\mathrm{R}}(I_{\mathrm{Rd}}^2 + I_{\mathrm{Rq}}^2). \tag{5.1c}$$

Zur Berechnung der Eisenverluste gibt es verschiedene Ansätze. Verbreitet ist der Ansatz nach Jordan. Der Ansatz wurde u. a. von [MVP08] hergeleitet und verwendet. Die Eisenverluste sind zerlegbar in Wirbelstromverluste und Hystereseverluste. Beide sind abhängig von der maximalen Induktion $\hat{B}$ im Eisenblech und der Ummagnetisierungsfrequenz f, welche der Erregerfrequenz der Signale im Eisenelement entspricht. Dabei gilt für Wirbelstromverluste $P_{\mathrm{fe\,w}} = k_{\mathrm{w}}f^2\hat{B}^2$ und Hystereseverluste $P_{\mathrm{fe\,h}} = k_{\mathrm{h}}f\hat{B}^2$. Die Parameter k_{w} und k_{h} sind maschinenspezifische Verlustkoeffizienten. Bei Standardasynchronmaschinen liegen beide Parameter in ähnlicher Größenordnung. Die Frequenz f muss für Stator und Rotor konkretisiert werden. Die Berechnung der maximalen Induktion in den Elektroblechen ist umständlich. Aufbauend auf Jordans Ansatz schlagen die Autoren Dittrich und Quang in [QD08] eine geeignetere Formulierung für feldorientierte Regelungen vor:

$$P_{\mathrm{fe\,S}} = \frac{3}{2}\left(k_{\mathrm{w}}\omega_\alpha^2 + k_{\mathrm{h}}|\omega_\alpha|\right)\Psi_{\mathrm{M}}^2, \tag{5.2a}$$

$$P_{\mathrm{fe\,R}} = \frac{3}{2}\left(k_{\mathrm{w}}\omega_{\mathrm{r}}^2 + k_{\mathrm{h}}|\omega_{\mathrm{r}}|\right)\Psi_{\mathrm{M}}^2. \tag{5.2b}$$

Der Fluss Ψ_{M}, der den Luftspalt überschreitet und aktiv zum Energiewandlungsprozess beiträgt, bildet im Normalfall den größten Teil des kompletten Flusses in Stator und Rotor

ab. Die Rotorflussfrequenz ω_α stimmt in etwa mit der Erregerkreisfrequenz des Stators ω_s überein und ersetzt diese in (5.2a). Die Schlupffrequenz $\omega_\mathrm{r} = \omega_\alpha - p\omega_\mathrm{m}$ der Rotorgrößen ist die verantwortliche Kreisfrequenz zur Erzeugung der Eisenverluste im Rotor $P_{\mathrm{fe\,R}}$. Vereinfachungen des Eisenverlustmodells, z. B. das Entfallen von (5.2b), werden im nächsten Abschnitt getroffen und diskutiert.

5.3. Diskussion der Eisenverluste

Entscheidungshilfen zur Wahl des Eisenverlustmodells bieten Berechnungen die mit MATLAB in Abschnitt 6.2 durchgeführt wurden. Ausgehend von einem sehr dynamischen Drehzahlprofil wurde numerisch eine verlustoptimale Flusskurve ermittelt. Die Berechnung verschiedener Eisenverlustmodelle basiert auf den gegebenen Größen des flachen Ausgangs. Um die Abhängigkeit der Eisenverluste vom Rotorfluss Ψ_Rd herzustellen, muss Ψ_M in (5.2) durch diesen abbildbar sein.

Wie in [Sch09, S.470] beschrieben, ist die Luftspaltflussverkettung durch

$$\Psi_\mathrm{M} = L_\mathrm{M}(\underline{I}_\mathrm{S} + \underline{I}_\mathrm{R}) \tag{5.3}$$

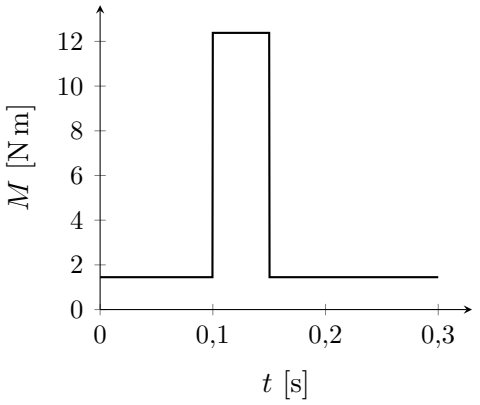
berechenbar. Unter Einführung von σ in der Modellgleichung (3.6d) ergibt sich

$$\underline{\Psi}_\mathrm{R} = (1-\sigma)L_\mathrm{R}\underline{I}_\mathrm{S} + L_\mathrm{R}\underline{I}_\mathrm{R}. \tag{5.4}$$

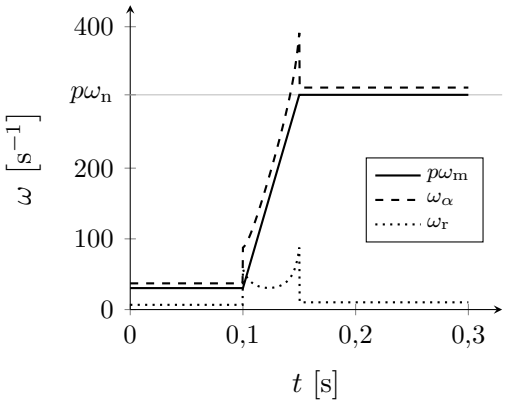
Die Annahme $\sigma \ll 1$ und das anschließende Gleichsetzen führt zur Approximation

$$\Psi_\mathrm{M} = \frac{L_\mathrm{M}}{L_\mathrm{R}}\Psi_\mathrm{Rd}, \tag{5.5}$$

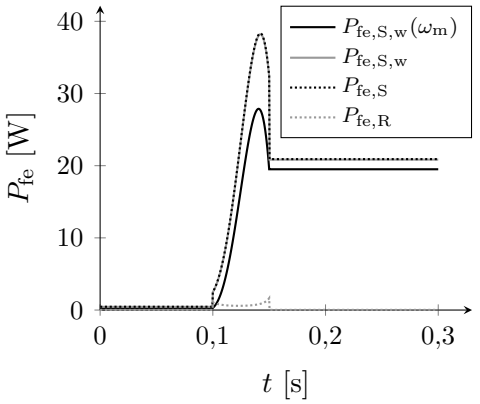
die bereits in [LY92b] verwendet wurde. Mit Hilfe von (5.5) führt die Berechnung von Kreisfrequenzen und Eisenverlusten zu dem Ergebnis in Abbildung 5.1. Die Koeffizienten besitzen in den Berechnungen die gleichen Beträge $k_\mathrm{w} = 0{,}001\,\mathrm{A/V}$ und $k_\mathrm{h} = 0{,}001\,\mathrm{A/(V\,s)}$. Die Schlupffrequenz ω_r bleibt wie erwartet viel kleiner als die Rotorflussfrequenz ω_α im beobachteten Regime, siehe Abbildung 5.1a. Wie in Teilabbildung 5.1c ebenfalls zu sehen, ist es ausreichend nur die Statoreisenverluste zu betrachten. Dieses Vorgehen ist bereits aus verschiedenen Veröffentlichungen [LY92a, LN04, QD08] bekannt. Für typische, günstige Asynchronmaschinen liegen die Beträge von Hysterese- und Wirbelstromkoeffizient in ähnlicher Größenordnung wie in der Berechnung bereits angenommen wurde. Jedoch



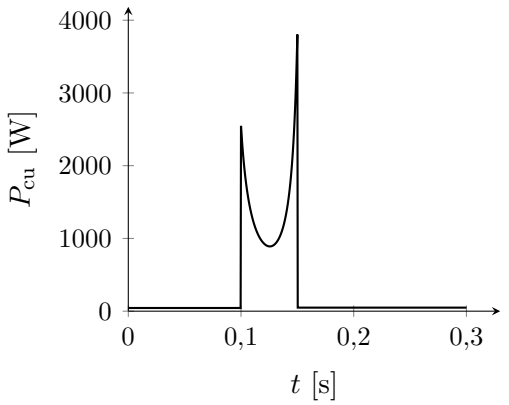
(a) Ein sehr dynamischer Verlauf des Drehmoments.



(b) Vergleich der Kreisfrequenzen macht die Vereinfachungen plausibel.



(c) Zwei Eisenmodelle: Gestrichelt die Statoreisenverluste und daneben die vereinfachte Variante von [SDK13].



(d) Die Kupferverluste übersteigen bei diesem Verlauf die Eisenverluste um mehr als eine Zehnerpotenz.

Abbildung 5.1.: Die Dominanz der Kupferverluste ist sehr groß in dynamischen Vorgängen. Dies relativiert den Einsatz eines sehr genauen Modells für die Eisenverluste.

steigt die Amplitude der Wirbelstromverluste quadratisch mit der Erregerfrequenz an. Ab wenigen Hertz ist der Anteil der Hystereseverluste nicht mehr erkennbar in Abbildung 5.1c. Die Statorwirbelstromverluste $P_{\mathrm{fe,S,w}}$ verlaufen fast deckungsgleich mit den kompletten Statoreisenverlusten $P_{\mathrm{fe,S}}$. So verbleibt unter Vernachlässigung der Hystereseverluste

$$P_{\mathrm{fe,S,w}} = \frac{3}{2} k_{\mathrm{w}} \omega_\alpha^2 \frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2} \Psi_{\mathrm{Rd}}^2 \tag{5.6}$$

als Verlustmodell übrig.

Letztlich kann der Einfluss der Schlupffrequenz als Teil der Rotorflussfrequenz in dieser Art der Regelung ebenso vernachlässigt werden, da sie laut Abbildung 5.1a kleiner als $p\omega_\mathrm{m}$ ist. Das Ersetzen von ω_α durch $p\omega_\mathrm{m}$ führt zu einem günstigeren Modell $P_\mathrm{fe,S,w}(\omega_\mathrm{m})$ aus Sicht des späteren mathematischen Aufwandes. Die berechneten Verluste sind sichtbar kleiner als die ursprünglichen Statorwirbelstromverluste laut Abbildung 5.1c. In Anbetracht der Dominanz der Kupferverluste in der Abbildung 5.1d rechts daneben ist diese Ungenauigkeit jedoch akzeptabel. Mit Einführung des Eisenverlustwiderstands $R_\mathrm{fe} = \frac{1}{k_\mathrm{w}}$ lautet das finale Eisenverlustmodell

$$P_\mathrm{fe} = P_\mathrm{fe,S,w}(\omega_\mathrm{m}) = \frac{3}{2}\frac{L_\mathrm{M}^2}{R_\mathrm{fe}L_\mathrm{R}^2}p^2\omega_\mathrm{m}^2\Psi_\mathrm{Rd}^2, \tag{5.7}$$

welches bereits in [SDK13, Stu13] verwendet wurde.

5.4. Verlustmodell für die Asynchronmaschine

Für das gesamte Verlustmodell erhält man zunächst folgende Gleichung aus der Summe der Kupfer- und Eisenverluste in Stator und Rotor:

$$P_\mathrm{v} = \frac{3}{2}\left(R_\mathrm{S}(I_\mathrm{Sd}^2 + I_\mathrm{Sq}^2) + R_\mathrm{R}(I_\mathrm{Rd}^2 + I_\mathrm{Rq}^2)\right) + \frac{3}{2}\frac{L_\mathrm{M}^2}{R_\mathrm{fe}L_\mathrm{R}^2}p^2\omega_\mathrm{m}^2\Psi_\mathrm{Rd}^2. \tag{5.8}$$

Alle zeitveränderlichen Größen sind Teil des flachen Systems und daher durch dessen Ausgang parametrierbar. In weiteren Schritten erfolgt die Herleitung zur Berechnung mit den bereits gefundenen flachen Ausgängen. Zunächst ist es in beiden Fällen günstig, den Rotorstrom zu substituieren. Die Gleichung (3.7) im d-q-Koordinatensystem

$$\underline{I}_\mathrm{R}^\mathrm{r} = \frac{1}{L_\mathrm{M}}\underline{\Psi}_\mathrm{S}^\mathrm{r} - \frac{L_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}}\underline{I}_\mathrm{S}^\mathrm{r} \tag{5.9}$$

ergibt nach dem Ersetzen des Statorflusses mittels (3.8):

$$\underline{I}_\mathrm{R}^\mathrm{r} = -\frac{(1-\sigma)\,L_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}}\underline{I}_\mathrm{S}^\mathrm{r} + \frac{1}{L_\mathrm{R}}\underline{\Psi}_\mathrm{R}^\mathrm{r} = -\frac{L_\mathrm{M}}{L_\mathrm{R}}\underline{I}_\mathrm{S}^\mathrm{r} + \frac{1}{L_\mathrm{R}}\underline{\Psi}_\mathrm{R}^\mathrm{r}. \tag{5.10}$$

Die Aufteilung in Realteil und Imaginärteil führt zu den Komponenten d und q des Rotorstromes:

$$I_{\mathrm{Rd}} = -\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}} I_{\mathrm{Sd}} + \frac{1}{L_{\mathrm{R}}} \Psi_{\mathrm{Rd}}, \tag{5.11a}$$

$$I_{\mathrm{Rq}} = -\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}} I_{\mathrm{Sq}}. \tag{5.11b}$$

Nach dem Einsetzen von (5.11a) und (5.11b) in (5.8) erhält man ein Verlustmodell in Abhängigkeit von $I_{\mathrm{Sd}}, I_{\mathrm{Sq}}, \Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}}$. Dieses Verlustmodell

$$P_{\mathrm{v}} = \frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right)\left(I_{\mathrm{Sd}}^2 + I_{\mathrm{Sq}}^2\right) - 3R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sd}} + \frac{3}{2}\frac{R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + \frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{fe}} L_{\mathrm{R}}^2} p^2 \omega_{\mathrm{m}}^2 \Psi_{\mathrm{Rd}}^2 \tag{5.12}$$

wurde bereits in [SDK13] gezeigt. Zur weiteren Untersuchung wird das Verlustmodell in Abhängigkeit von $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ benötigt. Einem einfachen Schema folgend wird jede Systemgröße aus (5.12) mit (4.12),(4.13) und (4.14) beschrieben und führt zur Darstellung:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{v}} = & \underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{R_{\mathrm{S}} L_{\mathrm{R}}^2}{L_{\mathrm{M}}^2} + R_{\mathrm{R}}\right)\frac{1}{p^2 \Psi_{\mathrm{Rd}}^2}\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{R_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\left(\Psi_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{R}}}{R_{\mathrm{R}}}\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}\right)^2 + \frac{3}{2}\frac{\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}^2}{R_{\mathrm{R}}}}_{P_{\mathrm{cu}}} \\ & + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{fe}} L_{\mathrm{R}}^2} p^2 \omega_{\mathrm{m}}^2 \Psi_{\mathrm{Rd}}^2}_{P_{\mathrm{fe}}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die Definition der Koeffizienten

$$a_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{R_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{M}}^2} + \frac{L_{\mathrm{M}}^2 p^2 \omega_{\mathrm{m}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2 R_{\mathrm{fe}}}\right), \tag{5.14a}$$

$$a_2 = 3\frac{R_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\tau_{\mathrm{R}}, \tag{5.14b}$$

$$a_3 = \frac{3}{2}\tau_{\mathrm{R}}^2\left(\frac{R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}^2} + \frac{R_{\mathrm{S}}}{L_{\mathrm{M}}^2}\right), \tag{5.14c}$$

$$a_4 = \frac{2}{3p^2}\left(\frac{R_{\mathrm{S}} L_{\mathrm{R}}^2}{L_{\mathrm{M}}^2} + R_{\mathrm{R}}\right) \tag{5.14d}$$

ergibt die Form

$$P_{\mathrm{v}} = a_1 \Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + a_2 \Psi_{\mathrm{Rd}} \dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} + a_3 \dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}^2 + a_4 \left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{1}{\Psi_{\mathrm{Rd}}^2}, \tag{5.15}$$

wobei beachtet werden muss, dass a_1 eine Funktion in Abhängigkeit von ω_{m} ist.

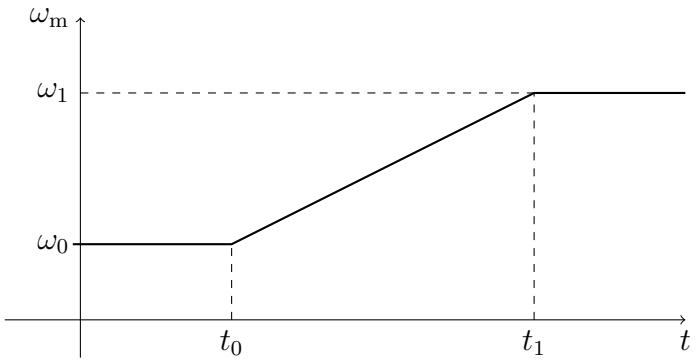


Abbildung 5.2.: Der Übergang zwischen zwei konstanten Drehzahlen erfolgt durch eine lineare Funktion

5.5. Betrachtung zur Minimierung der Verluste

Gesucht ist die zeitabhängige Funktion $t \mapsto \Psi_\mathrm{Rd}(t)$, bedingt durch die Wahl von $t \mapsto \omega_\mathrm{m}(t)$ (Drehzahlüberführung in Analogie zu einem technischen Prozess), welche die Verlustenergie

$$W_\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t_1} P_\mathrm{v}(t)dt \tag{5.16}$$

minimiert. Im Detail: Das technisch vorgegebene Drehzahlprofil beinhaltet eine Überführung zwischen zwei stationären Arbeitspunkten gemäß Abbildung 5.2. Die Asynchronmaschine wird bis zu dem Zeitpunkt t_0 mit einer konstanten Drehzahl $\omega_{\mathrm{m}\,0}$ betrieben. Es folgt ein Übergang zur Drehzahl $\omega_{\mathrm{m}\,1}$, die zum Zeitpunkt t_1 erreicht wird. Für das gegebene Drehzahlprofil soll das Minimum der Verluste in den stationären Bereichen (Bedingung $\omega_\mathrm{m} = \text{konst.}$) und im dynamischen Bereich (Drehzahlüberführung mit $t \mapsto \omega_\mathrm{m}(t)$) bestimmt werden. Die Verwendung einer linearen Drehzahlfunktion besitzt den Vorteil, dass während einer Überführung das Drehmoment idealerweise als konstant betrachtet wird. Analytische Berechnungen zur Verlustminimierung werden dadurch vereinfacht.

5.5.1. Stationärer Arbeitsbereich

Im stationären Arbeitspunkt vereinfacht sich die Funktion wegen $\dot{\omega}_\mathrm{m} = 0$ und $\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} = 0$ zu

$$P_{\mathrm{v\,stat}} = \underbrace{\frac{2}{3}\left(\frac{R_\mathrm{S}L_\mathrm{R}^2}{L_\mathrm{M}^2} + R_\mathrm{R}\right)\frac{M_\mathrm{L}^2}{p^2\Psi_\mathrm{Rd}^2} + \frac{3}{2}\frac{R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2}\Psi_\mathrm{Rd}^2}_{P_\mathrm{cu}} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{L_\mathrm{M}^2}{R_\mathrm{fe}L_\mathrm{R}^2}p^2\omega_\mathrm{m}^2\Psi_\mathrm{Rd}^2}_{P_\mathrm{fe}}. \tag{5.17}$$

Ohne weitere Festlegungen/Bedingungen besitzt die Funktion (5.17) drei Freiheitsgrade: Die Größen $\Psi_\mathrm{Rd}, \omega_\mathrm{m}$ und M_L. Das Lastmoment M_L ist als bekannter, zeitabhängiger Parameter aufzufassen. In den stationären Betrachtungen gilt $M_\mathrm{L} = M_\mathrm{M} =$ konstant. Der Verlauf von ω_m ist durch einen technischen Prozess gegeben, wie bereits in Abb. 5.2 veranschaulicht. Es verbleibt der Freiheitsgrad Ψ_Rd. Basierend auf der üblichen Extremwertbedingung $\frac{dP_\mathrm{v,stat}}{d\Psi_\mathrm{Rd}} = 0$ erhält man zur Bestimmung des verlustoptimalen Ψ_Rd die Gleichung

$$\Psi_\mathrm{Rd,opt} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{M_\mathrm{M}}{p}\sqrt{\frac{L_\mathrm{R}^4R_\mathrm{S}R_\mathrm{fe} + L_\mathrm{R}^2L_\mathrm{M}^2R_\mathrm{R}R_\mathrm{fe}}{L_\mathrm{R}^2R_\mathrm{S}R_\mathrm{fe} + L_\mathrm{M}^4p^2\omega_\mathrm{m}^2}}}. \tag{5.18}$$

Es stellt sich heraus, dass der optimale Fluss $\Psi_\mathrm{Rd,opt}$ vordergründig vom konstanten Drehmoment und zweitrangig von einer konstanten Drehzahl ω_m abhängt. Selbst wenn das gleiche Lastmoment vor und nach der Drehzahlüberführung wirkt, unterscheidet sich die optimale Flussverkettung durch die unterschiedlichen Drehzahlen. Folglich ist der Fluss, berechnet nach 5.18, kleiner im stationären Arbeitspunkt mit höherer Drehzahl.

5.5.2. Dynamischer Arbeitsbereich

Bei einem vorgegebenen Überführungsvorgang der Drehzahl ändert sich diese und die Einschränkungen des stationären Betriebes $\dot{\omega}_\mathrm{m} = 0$ und $\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} = 0$ sind nicht mehr gültig. Basierend auf dem entwickelten Verlustmodell (5.13) soll nun eine Minimierung des Integrals $W_\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t_1} P_\mathrm{v}(\Psi_\mathrm{Rd}(t), \dot{\Psi}_\mathrm{Rd}(t))dt$ stattfinden. Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, muss die

Funktion $y_1(t)$ der Bedingung

$$\underbrace{\frac{\partial P_\mathrm{v}}{\partial \Psi_\mathrm{Rd}}}_{A} - \underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial P_\mathrm{v}}{\partial \dot{\Psi}_\mathrm{Rd}}}_{B}}_{C} = 0 \tag{5.19}$$

genügen.

$$\begin{aligned} A &= 2a_1\Psi_\mathrm{Rd} + a_2\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} - 2a_4\left(J\dot{\omega}_\mathrm{m} + M_\mathrm{L}\right)^2 \frac{1}{\Psi_\mathrm{Rd}^3} \\ B &= a_2\Psi_\mathrm{Rd} + 2a_3\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} \\ C &= a_2\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} + 2a_3\ddot{\Psi}_\mathrm{Rd} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Terme A und C eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung (5.19) ergeben die notwendige Extremwertbedingung

$$a_1\Psi_\mathrm{Rd}^4 - a_3\Psi_\mathrm{Rd}^3\ddot{\Psi}_\mathrm{Rd} = a_4\left(J\dot{\omega}_\mathrm{m} + M_\mathrm{L}\right)^2 \tag{5.21}$$

Es ist problematisch für die nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung eine analytische Lösung zu ermitteln. In Abschnitt 6.1 wird die Gleichung (5.21) diskutiert und eine Lösung vorgeschlagen.

Bemerkung 3 *In einem zweiten Fall soll ausschließlich P_cu minimiert werden. Dieses Vorgehen ist aus verschiedenen Publikationen (z. B. [WR99]) bekannt. Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung führt zu*

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4}{3}\left(\frac{R_\mathrm{S}L_\mathrm{R}^2}{L_\mathrm{M}^2} + R_\mathrm{R}\right)\frac{\left(J\dot{\omega}_\mathrm{m} + M_\mathrm{L}\right)^2}{p^2\Psi_\mathrm{Rd}^3} + 3\frac{R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2}(\Psi_\mathrm{Rd} + \frac{L_\mathrm{R}}{R_\mathrm{R}}\dot{\Psi}_\mathrm{Rd}) \\ B &= \frac{3}{R_\mathrm{R}}\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} + 3\frac{R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2}\left(\frac{L_\mathrm{R}}{R_\mathrm{R}}\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} + \Psi_\mathrm{Rd}\right)\frac{L_\mathrm{R}}{R_\mathrm{R}} \\ C &= 3\frac{L_\mathrm{R}R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2R_\mathrm{R}}\dot{\Psi}_\mathrm{Rd} - 3\left(\frac{1}{R_\mathrm{R}} + \frac{L_\mathrm{R}^2R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2R_\mathrm{R}^2}\right)\ddot{\Psi}_\mathrm{Rd}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Zusammengefasst mit

$$a_{\mathrm{cu},1} = 3\left(\frac{R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2}\right), \tag{5.23a}$$

$$a_{\mathrm{cu},3} = 3\tau_\mathrm{R}^2\left(\frac{R_\mathrm{R}}{L_\mathrm{R}^2} + \frac{R_\mathrm{S}}{L_\mathrm{M}^2}\right), \tag{5.23b}$$

$$a_{\mathrm{cu},4} = \frac{4}{3p^2}\left(\frac{R_\mathrm{S}L_\mathrm{R}^2}{L_\mathrm{M}^2} + R_\mathrm{R}\right) \tag{5.23c}$$

erhält man einen ähnlichen Ausdruck für die Extremwertbedingung:

$$a_{\mathrm{cu},1}\Psi_\mathrm{Rd}^4 - a_{\mathrm{cu},3}\Psi_\mathrm{Rd}^3\ddot{\Psi}_\mathrm{Rd} = a_{\mathrm{cu},4}\left(J\dot{\omega}_\mathrm{m} + M_\mathrm{L}\right)^2. \tag{5.24}$$

Im Vergleich zu (5.21) *verändern sich nur die Koeffizienten. Es besteht keine Abhängigkeit mehr von* ω_m*. Dafür bleibt es problematisch die Gleichung analytisch zu lösen.*

5.5.3. Diskussion zur Existenz eines Minimums

Wenn eine Lösung für (5.21) gefunden wird, nimmt das Integral (5.16) einen Extremwert an. Unter der Voraussetzung, dass die Integrationszeit konstant ist, muss das Minimum des Integranden, die Verlustleistung, zu minimaler Verlustenergie führen. Im stationären Betrieb ist die Existenz eines Minimums der Funktion $P_\mathrm{v,stat}$ anschaulich beschreibbar. Die Tatsache, dass die reelle Achse des Rotorflusskoordinatensystem zu jedem Zeitpunkt t der Orientierung des Raumzeigers $\underline{\Psi}_\mathrm{R}$ gleicht, schränkt den Defintionsbereich auf $\Psi_\mathrm{Rd} \in [0+, \infty]$ ein. Für die Winkelgeschwindigkeit gilt $\omega_\mathrm{m} \in [-\infty, \infty]$. Die Grenzwerte der Funktion $(\Psi_\mathrm{Rd}, \omega_\mathrm{m}) \mapsto P_\mathrm{v\,stat}$ am Rand des Definitionsbereichs betragen

$$\lim_{\Psi_\mathrm{Rd}\to\infty} P_\mathrm{v,stat} = \infty, \tag{5.25}$$

$$\lim_{\Psi_\mathrm{Rd}\to 0+} P_\mathrm{v,stat} = \infty, \tag{5.26}$$

$$\lim_{\omega_\mathrm{m}\to\infty} P_\mathrm{v,stat} = \infty, \tag{5.27}$$

$$\lim_{\omega_\mathrm{m}\to-\infty} P_\mathrm{v,stat} = \infty. \tag{5.28}$$

Die Funktion $P_\mathrm{v,stat}$ strebt in allen Randwertuntersuchungen gegen Unendlich. Folglich muss es ein globales Minimum geben. Die Anschaulichkeit wird durch die exemplarische Abbildung 5.3, in der die Funktion $(\Psi_\mathrm{Rd}, \omega_\mathrm{m}) \mapsto P^+_\mathrm{v,stat}$ anhand des Parametersatzes aus

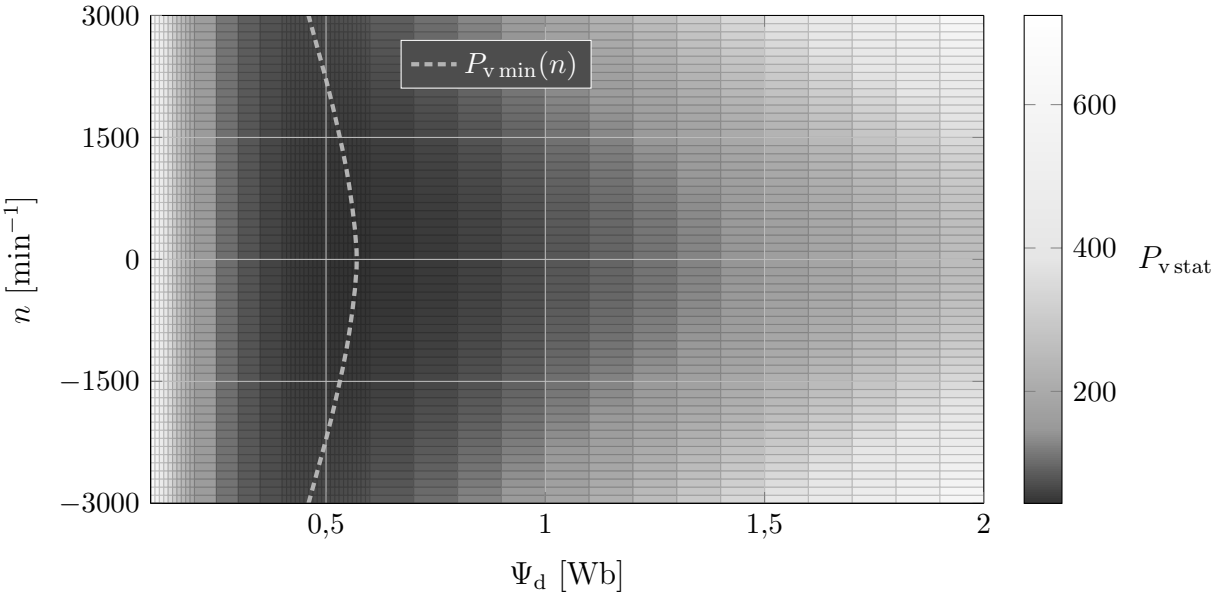


Abbildung 5.3.: Der benötigte Parametersatz zur Berechnung stammt aus [SDK13]. Es handelt sich um eine Asynchronmaschine mit einer Nennleistung von $P_\mathrm{n} = 2{,}2\,\mathrm{kW}$. Die Belastung beträgt $M_\mathrm{L} = 0{,}2 M_\mathrm{n}$.

Tabelle 6.1 berechnet wurde, erhöht. Im dynamischen Betrieb ist die Art des Extremwertes nicht anschaulich darstellbar. Nach Annahme ist dieser Wert ein Minimum. Die Bestätigung dieser Annahme erfolgte bereits durch eine mathematische Beweisführung in [WR99].

6. Trajektorienplanung für geringe Verluste im dynamischen Betrieb

In Anbetracht eines gegebenen Drehzahlverlaufs muss nur die zweite Komponente des flachen Ausgangs entsprechend geplant werden. Deshalb steht in diesem Kapitel der Entwurf einer verlustoptimalen Flusstrajektorie Ψ_{Rd} im Vordergrund. Der Verlauf kann im Prinzip frei gestaltet werden, da nach Definition des flachen Ausgangs, dessen Komponenten (differentiell) unabhängig sind. Wichtig ist, dass beide Größen stetig einfach ableitbar sind, damit alle Systemgrößen korrekt berechnet werden können. Zudem gibt es Rahmenbedingungen, um die Modellgültigkeit zu wahren und den sicheren Betrieb der Maschine nicht zu gefährden. Im stationären Arbeitspunkt soll der Rotorfluss Ψ_{Rd} mit dem effizientesten Wert $\Psi_{\mathrm{Rd,opt}}$ aus Gleichung 5.18 übereinstimmen. Zur Vermeidung von Eisensättigungseffekten darf der Ψ_{Rd} den Nennwert $\Psi_{\mathrm{Rd,nenn}}$ nicht überschreiten, ebenso gibt es eine untere Grenze $\Psi_{\mathrm{Rd}} \geq 0{,}2\Psi_{\mathrm{Rd,nenn}}$, die eine gute Regeldynamik sicherstellt. Nach Festlegung dieser Einschränkungen verbleibt die konkrete verlustoptimale Planung zwischen zwei stationären Arbeitspunkten wie Abbildung 6.1 verdeutlicht. Im vorigen Kapitel wurde bereits die mathematische Bedingung (5.21) für die effizienteste Überführung zwischen zwei Randwerten hergeleitet. Kennt man eine analytische Lösung zu (5.21), so kann mit Hilfe der zwei Randwerte $\Psi_{\mathrm{Rd,a}}$ und $\Psi_{\mathrm{Rd,b}}$ immer eine konkrete verlustoptimale Trajektorie angegeben werden (ein gegebenes Drehzahlprofil vorausgesetzt). Soweit ist noch keine exakte Lösung gefunden wurden, deshalb soll zunächst eine numerische Bestimmung der verlustoptimalen Flusstrajektorie stattfinden. Danach folgt das intensive Auseinandersetzen mit einem veröffentlichten Lösungsweg, der einen verringerten numerischen Aufwand präsentiert. Die Untersuchungen resultieren in einer alternativen Ermittlung energieeffizienter Flusstrajektorien ohne iterative Algorithmen.

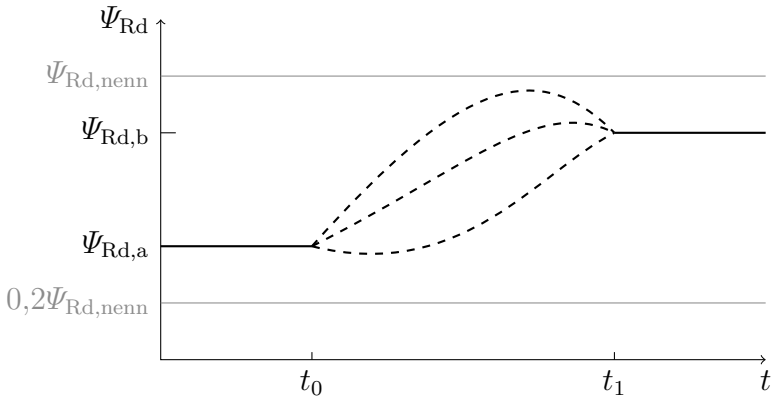
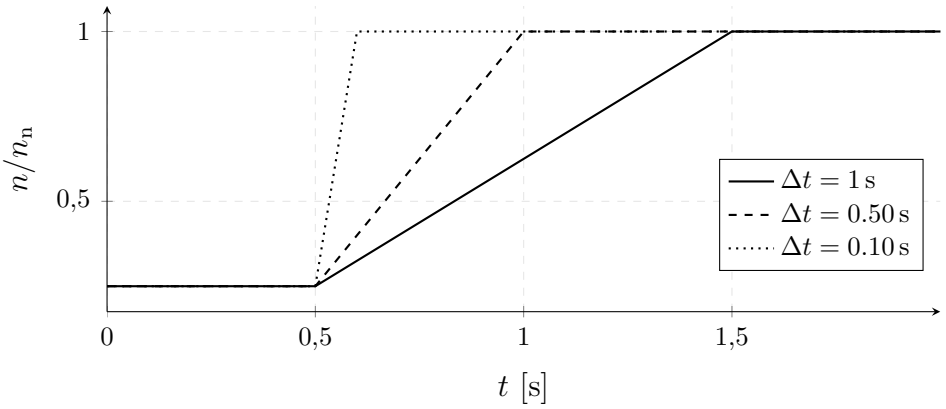


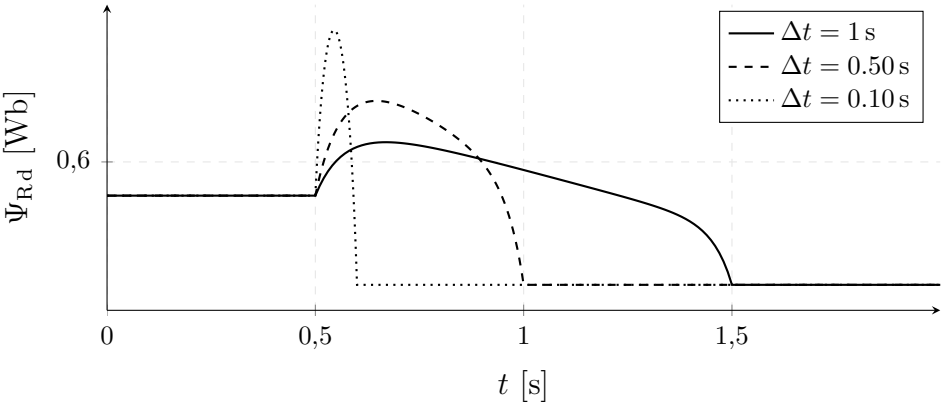
Abbildung 6.1.: Von Randwert zu Randwert sind ohne verlustoptimale Bedingung beliebige Trajektorien möglich.

6.1. Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung mit numerischer Methode

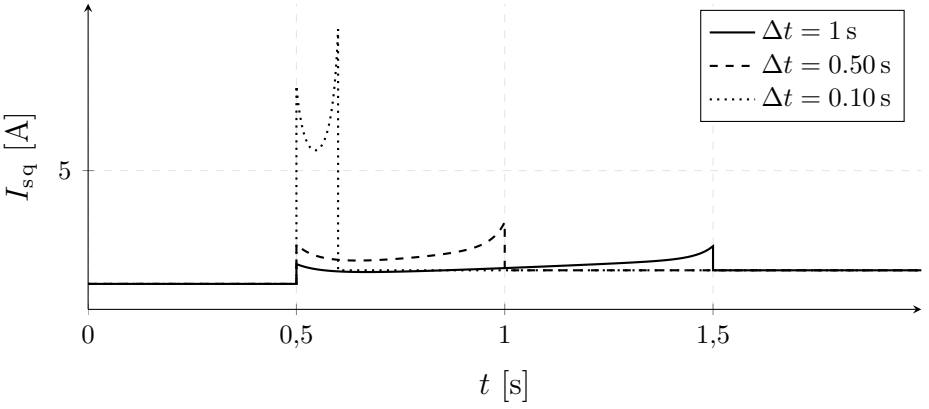
Eine analytische Lösung der Gleichung (5.21) konnte bisher nicht gefunden werden, weil herkömmliche Ansätze bei dieser nichtlinearen zeitvarianten Differentialgleichung zweiter Ordnung fehlschlagen. Mit Hilfe der eingebauten MATLAB -Funktion *bvp4c()* ist es möglich, die Lösung als Randwertproblem numerisch zu berechnen [Pie14]. Es gibt momentan den Nachteil, dass die Berechnung der optimalen Rotorflusstrajektorie in dieser Form zu langsam für eine Echtzeitimplementierung ist. Eine analytische Lösung bzw. ein einfacherer numerischer Algorithmus ist günstiger. Sie dient damit im Moment nur als Referenzmethode für das Optimum des Flussverlaufs und wird in weiteren Abschnitten benutzt um das Optimierungspotential anderer Methoden festzustellen. Das Ergebnis der numerischen Lösung von (5.21) mittels der MATLAB -Funktion *bvp4c()* ist für drei verschiedene Drehzahlfunktionen in Abbildung 6.2 dargestellt. In den Teilabbildungen sind alle Systemgrößen zuzüglich der Verluste dargestellt. Die numerische Lösung zeigt parabelähnliche Verläufe für die verlustoptimalen Rotorflussbahnen in Abbildung 6.2b.



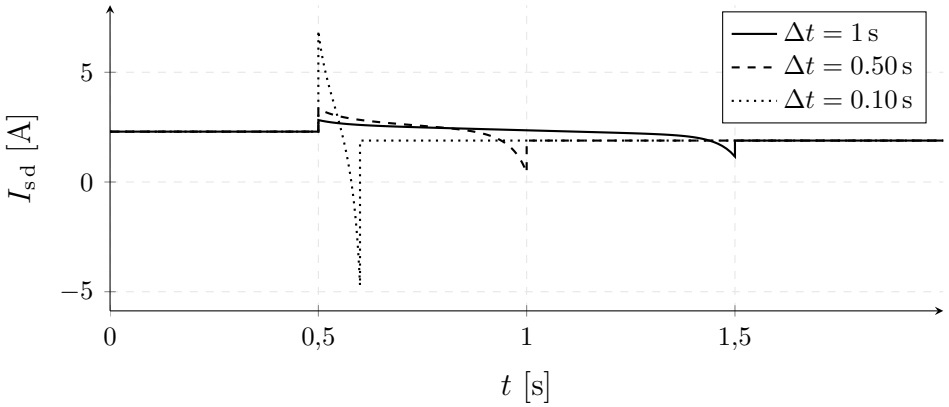
(a) Es wurden drei lineare Drehzahländerungen unterschiedlicher Steigung vorgegeben.



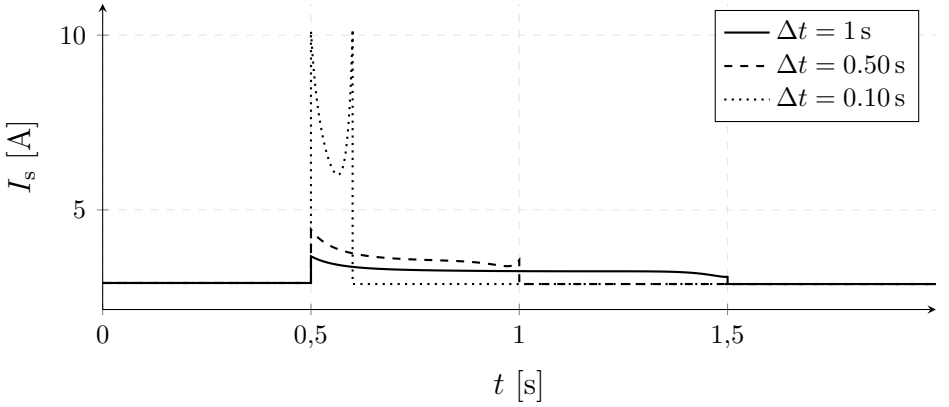
(b) Die Rotorflussverkettung erreicht sehr hohe Werte für eine energieoptimale Drehzahländerung. In diesem Bereich kommt es kurzzeitig zu großer Sättigung der Eisenteile der Maschine. Der Effekt lässt sich im Modell nicht beurteilen, da ausschließlich ein linearer Zusammenhang zwischen Fluss und Strom verwendet wird.



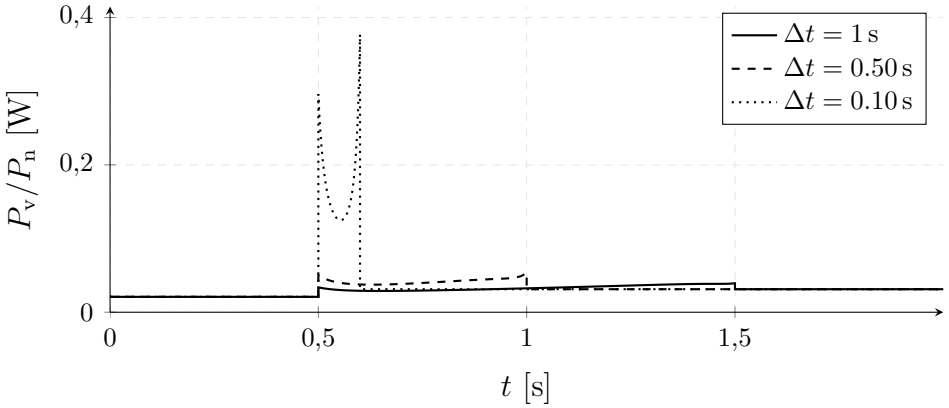
(c) Der drehmomentbildende Stromanteil verändert sich bei einem Drehzahlwechsel bedingt durch den Verlauf des Flusses und das innere Motormoment.



(d) Der flussbildende Stromanteil verhält sich entsprechend der Modellgleichungen und ist nur von Ψ_{Rd} und $\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}$ abhängig.



(e) Der Betrag des Phasenstromes ergibt sich rechnerisch aus den komplexen Anteilen I_{sd} und I_{sq}



(f) Die Verluste sind je nach Drehzahlprofil minimiert und sehr unterschiedlich. Die gewünschte Winkelbeschleunigung bzw. das generierte Drehmoment der Maschine sind dabei entscheidend für die Größe der Verlustenergie.

Abbildung 6.2.: Das Diagramm 6.2b zeigt die numerische Lösung für verschiedene Drehzahlerhöhungen aus 6.2a bei der konstanten Belastung $M_{\mathrm{L}} = 0{,}2M_n$. Die Größe Δt beschreibt die Anstiegszeit der Drehzahlprofile. Deren Funktion n ist zur Nenndrehzahl n_{n} genormt. Die anderen Funktionen sind entsprechend ihrer Modellgleichungen berechnet.

6.2. Diskussion einer publizierten Lösung

Um die Vorgehensweise von [SDK13] kritisch zu diskutieren, muss zunächst der grundlegende Ablauf bekannt sein. Der publizierte Lösungsweg erfordert eine Drehmoment- und Flussverkettungstrajektorie. Anhand der Trajektorien werden alle anderen relevanten Systemgrößen nach dem Prinzip der Flachheit berechnet, d. h. die Trajektorien legen den Verlauf aller anderen Systemgrößen fest. Die wichtigste Aufgabe beruht auf der mathematischen Formulierung der energieoptimalen Trajektorienverläufe. Mit Hilfe einer flachheitsbasierten Folgeregelung werden die optimalen Verläufe möglichst genau realisiert. Es folgt eine ausführliche Beschreibung und Untersuchung der verwendeten Vorgehensweise der Autoren Stumper, Dötlinger und Kennel.

6.2.1. Beschreibung der Methodik

Die Einzigartigkeit der Veröffentlichung besteht in der energieoptimalen Trajektorienplanung. Anhand der Abbildung 6.3 lässt sich parallel zur folgenden Beschreibung die Berechnung des Drehmomentverlaufs und des energieoptimalen Rotorflussverlaufs schematisch nachvollziehen. Die Grundlagen sind den Ausführungen der vorherigen Kapitel zu entnehmen. Die Funktionsweise der Asynchronmaschine wird durch zwei Modellgleichungen im rotorflussfesten Koordinatensystem beschrieben. Diese Gleichungen ermöglichen die Vorhersage der anderen Systemgrößen, die sich alle aus der Kenntnis von Drehmoment M_M und Rotorfluss Ψ_Rd berechnen lassen. Die Bewertung der Verluste erfolgt durch ein mathematisches Modell gleich (5.15). Wie bereits bekannt, lässt sich mittels der Variationsrechnung eine Bedingung für den verlustärmsten Weg zwischen zwei Arbeitspunkten der Asynchronmaschine mit Käfigläufer formulieren (Euler-Lagrange-Gleichung (5.19)). Die Arbeit von Stumper präsentiert eine Möglichkeit die Bedingung (6.3) mit geringem Aufwand zu lösen. Sie enthält die generell zeitvarianten Größen $M_\mathrm{M}, \Psi_\mathrm{Rd}$ und ω_m und eine analytisch exakte Lösung findet sich nur für den drehmomentfreien Einzelfall ($M_\mathrm{M} = 0$,$\omega_\mathrm{m} = konst.$) in Form einer Exponentialfunktion mit der Zeitkonstante $t_s = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$.

Zur numerischen Lösung der Euler-Lagrange-Bedingung für Ψ_Rd benötigt man die Verläufe von Drehmoment und Drehzahl. Die Drehzahl wird in der Berechnung von dynamischen Vorgängen stets mit dem letzten stationären Wert angenommen. Der Drehmomentverlauf wird als Solltrajektorie vorgegeben. Einer Sprungvorgabe kann von keiner Regelung

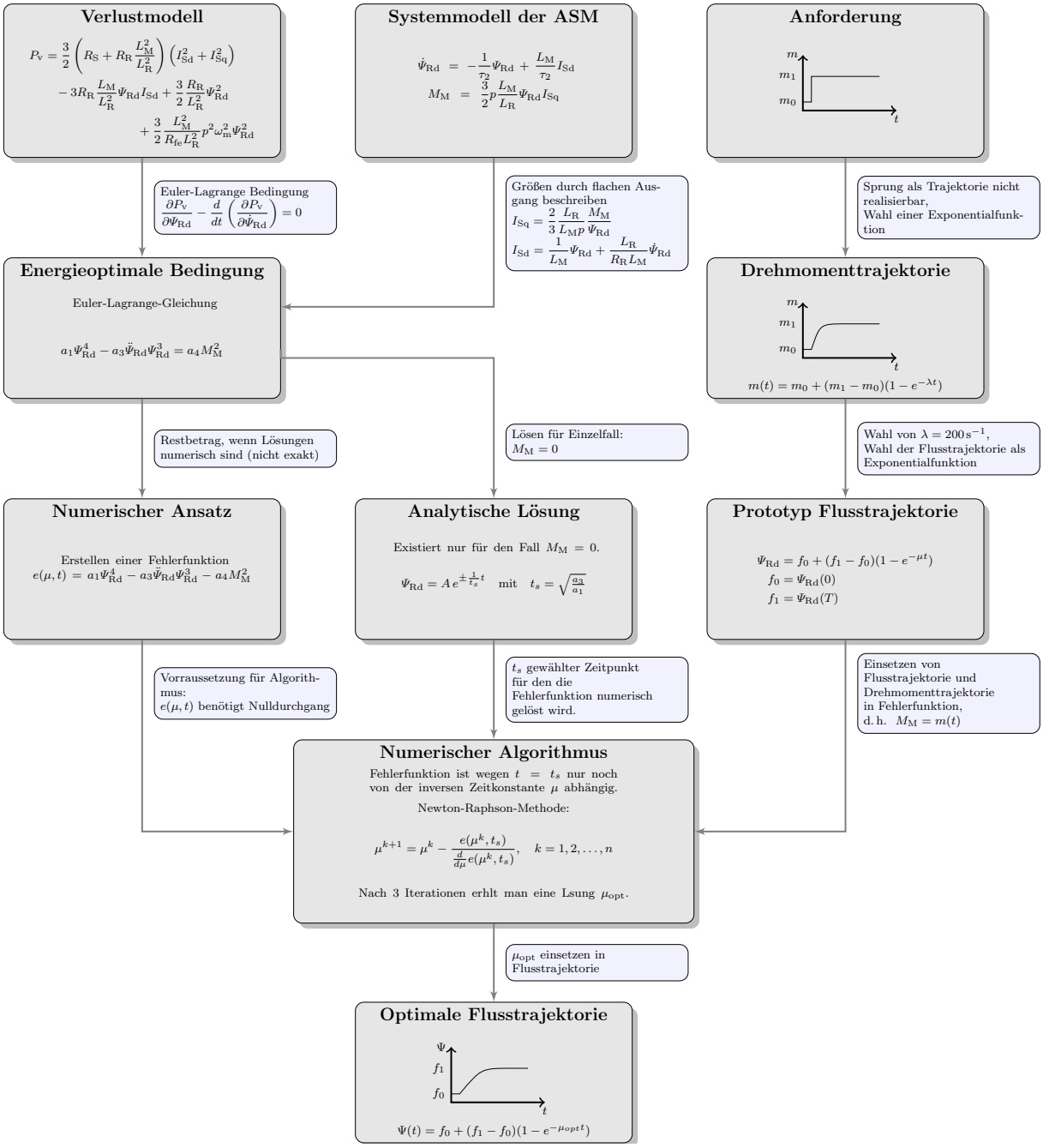


Abbildung 6.3.: Ermittlung der verlustoptimalen Flusstrajektorie entsprechend Veröffentlichung [SDK13]. Es werden viele Einschränkungen und Annahmen vorgenommen.

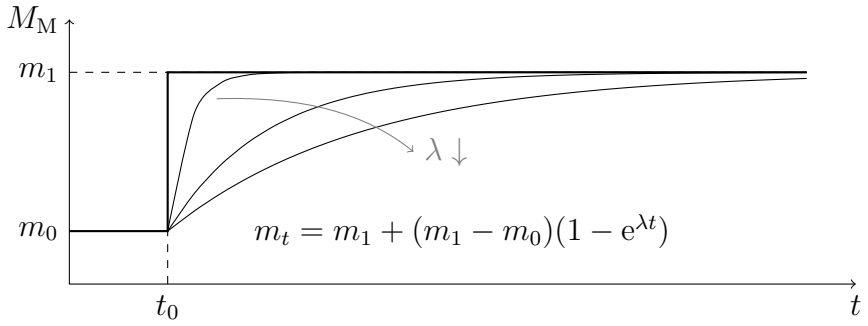


Abbildung 6.4.: Verlauf der geplanten Drehmomenttrajektorie in Abhängigkeit von λ. Je größer λ, desto geringer die Abweichung zwischen geplanter Trajektorie und dem Eingangssprung.

exakt gefolgt werden, daher wurde eine Drehmomenttrajektorie geplant, die dem Eingangssprung möglichst ähnelt:

$$m_t = m_0 + (m_1 - m_0)(1 - e^{\lambda t}). \tag{6.1}$$

Diese Funktion entspricht der Sprungantwort eines PT1-Gliedes. Der exponentielle Verlauf wird durch den Anfangswert m_0, den Endwert m_1 und die inverse Zeitkonstante λ aus Abbildung 6.4 eindeutig festgelegt. Dabei ist die Wahl der inversen Zeitkonstante λ willkürlich. Ein hoher Wert für λ bildet den Eingangssprung bestmöglich nach. Die Autoren Stumper, Dötlinger und Kennel beschreiben keinen Idealwert für die inverse Zeitkonstante λ und legen $\lambda = 200\,\mathrm{s}^{-1}$ in ihrer Veröffentlichung fest. Es folgt die nähere Betrachtung des Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der verlustarmen Flusstrajektorie. Die Euler-Lagrange-Gleichung (6.3) lässt sich unter der angenommenen Drehmomenttrajektorie analytisch nicht lösen. Geschieht die Auflösung nach Ψ_Rd jedoch numerisch, so scheint die numerische Lösung einer Exponentialfunktion zu ähneln. Daher entschieden sich die Autoren folgenden Prototypen der Flusstrajektorie

$$\Psi_\mathrm{Rd} = f_0 + (f_1 - f_0)(\mathrm{e}^{\mu t}), \tag{6.2}$$

ähnlich zu der Drehmomentfunktion, vorzugeben. Hierbei sind die Größen f_0, f_1 Flussanfangs- und Flussendwert und μ ist die inverse Zeitkonstante der Exponentialfunktion. Der Prototyp besitzt damit inklusive der Zeit t vier Freiheitsgrade. Festlegen der Randwerte führt zur Reduktion der freien Variablen: Anfangs- und Endwert sind vorgegeben durch $f_0 = \Psi_\mathrm{Rd,opt}(M_\mathrm{M} = m_0)$ und $f_1 = \Psi_\mathrm{Rd,opt}(M_\mathrm{M} = m_1)$, Optima des Flusses im vergangenen und erwarteten stationären Arbeitspunkt. Die inverse Zeitkonstante der Prototypfunktion soll nun so angepasst werden, dass die summierten Verluste minimal sind.

Die Differenz der linken und rechten Gleichungsseite der dynamisch verlustoptimalen Bedingung

$$a_1 \Psi_{\mathrm{Rd}}^4 - a_3 \ddot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} \Psi_{\mathrm{Rd}}^3 = a_4 m_t^2 \tag{6.3}$$

ergibt die Abweichung

$$e(\mu, t) = a_1 \Psi_{\mathrm{Rd}}^4 - a_3 \ddot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} \Psi_{\mathrm{Rd}}^3 - a_4 m_t^2. \tag{6.4}$$

Im Idealfall ist die Euler-Lagrange-Bedingung zu jedem Zeitpunkt exakt erfüllt und die Fehlerfunktion $e(\mu, t)$ stets Null. Die Autoren grenzen die Prototypbestimmung auf eine einfache eindimensionale Suche ein. Ziel der numerischen Lösungssuche ist, die inverse Zeitkonstante μ der Rotorflusstrajektorie zu einem bestimmten Moment $t = t_{\mathrm{s}}$ zu bestimmen, so dass die Abweichung zum gewählten Zeitpunkt annähernd verschwindet, sprich $e(\mu, t_{\mathrm{s}}) = 0$. Der Zeitpunkt t_s entstammt aus der analytischen, drehmomentfreien Lösung der Euler-Lagrange-Bedingung und gibt dem Referenzzeitpunkt einen willkürlichen Charakter. Nach wenigen Iterationen (z. B. $n = 10$) erhält man mittels der Newton-Raphson-Methode

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{e(\mu_k, t_s)}{\dfrac{d}{d\mu} e(\mu_k, t_{\mathrm{s}})} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6.5}$$

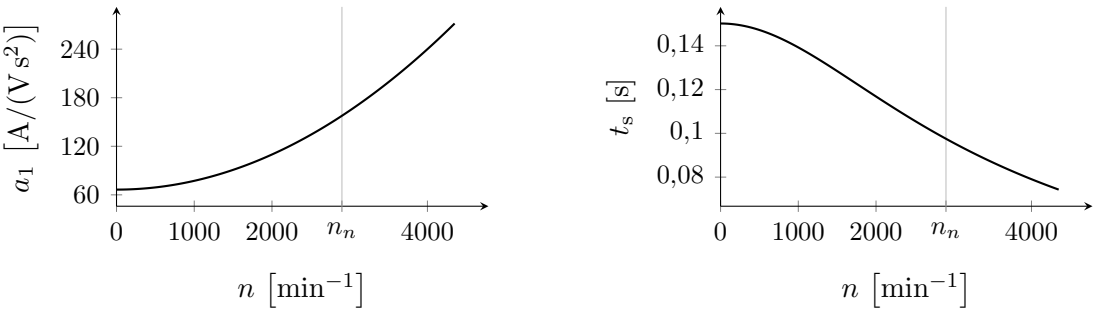
ein ausreichend genaues Ergebnis $\mu = \mu_{10}$ für die inverse Zeitkonstante. Dafür ist Voraussetzung, dass $e(\mu, t_{\mathrm{s}})$ einen Nulldurchgang besitzt. Ansonsten kann die Newton-Raphson-Methode nicht konvergieren. Mit dem gefundenen Ergebnis erhält man eine Flusstrajektorie

$$\Psi_{\mathrm{Rd}} = f_0 + (f_1 - f_0)(1 - \mathrm{e}^{\mu_s t}), \tag{6.6}$$

die zumindest zum Zeitpunkt $t = t_s$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung perfekt erfüllt. Im restlichen Zeitraum sind Abweichungen vorhanden und folglich die zugehörigen Verluste nicht minimal. Nach Ablauf des Algorithmus stehen die beiden Trajektorien fest und die Regelung folgt dem Verlauf dieser, um den Drehmomentsprung verlustarm zu realisieren.

Tabelle 6.1.: Herstellerangaben der Asynchronmaschine aus [SDK13]

P_N in W	M_N in N m	n_N in min^{-1}	p	L_m in mH	L_S in mH	L_R in mH	R_S in Ω	R_R in Ω	R_fe in Ω
2200	7,4	2840	1	245	255	255	2,66	2,27	1400



(a) Zwischen a_1 und n besteht eine quadratische Abhängigkeit.

(b) Die Funktion t_s variiert durch k_1.

Abbildung 6.5.: Der Koeffizient a_1 aus (6.4) und der Zeitpunkt t_s zur Berechnung von μ_s sind abhängig von der Drehzahl n.

6.2.2. Schwächen der publizierten Methodik

Anhand der vorherigen Beschreibung wurden Simulationen des Algorithmus und dessen Ergebnis mit der Software MATLAB durchgeführt. Die Maschinendaten sind in Tabelle 6.1 aufgeführt und stammen aus [SDK13].

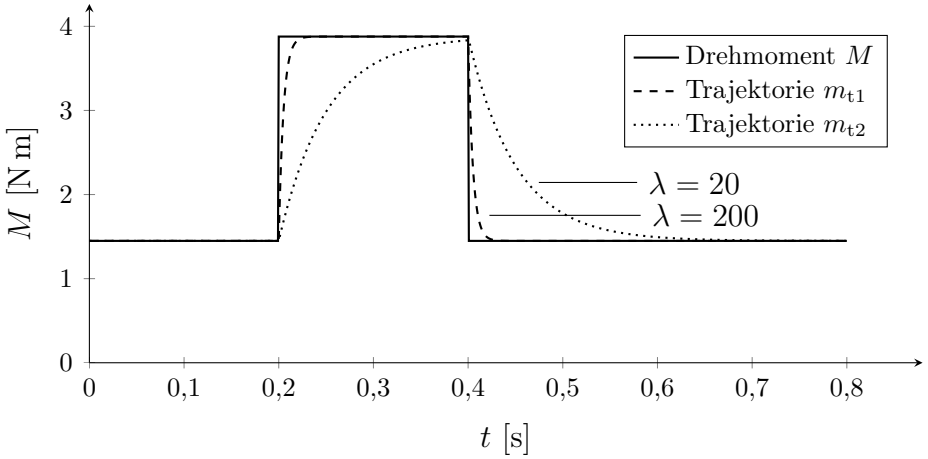
Es gibt verschiedene Punkte der angebotenen Lösungsmethodik, die diskussionswürdig sind. Bei der numerischen Lösung der Gleichung (6.4) werden die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 als Konstanten eingeführt. Für dynamische Vorgängen gilt das jedoch nicht. Im Fall einer Drehzahlüberführung verhält sich der Koeffizient a_1 proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Der verwendete Zeitpunkt $t_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$ ist folglich ebenfalls abhängig. Abbildung 6.5 zeigt die absoluten Veränderungen der Parameter a_1 und t_s für die Maschinendaten aus 6.1.

Anhand der Simulationen erfolgt eine Gegenüberstellung von zwei verschiedenen Drehmomenttrajektorien, deren Verlauf sich nur durch die Wahl von λ unterscheidet. Eine Trajektorie bildet die Vorgabe gut ab ($\lambda = 200$) und der andere Kandidat sieht einen exponentiellen Verlauf mit deutlich geringeren Anstieg vor ($\lambda = 20$). Die Drehmomentanforderung beruht auf einer linearen Drehzahlüberführung von $n_0 = 0{,}2 n_\mathrm{N}$ bis $n_1 = n_\mathrm{N}$ in einer Zeit von $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s}$ bei konstantem Lastmoment $M_\mathrm{L} = 0{,}2 M_N$. Dem Schema

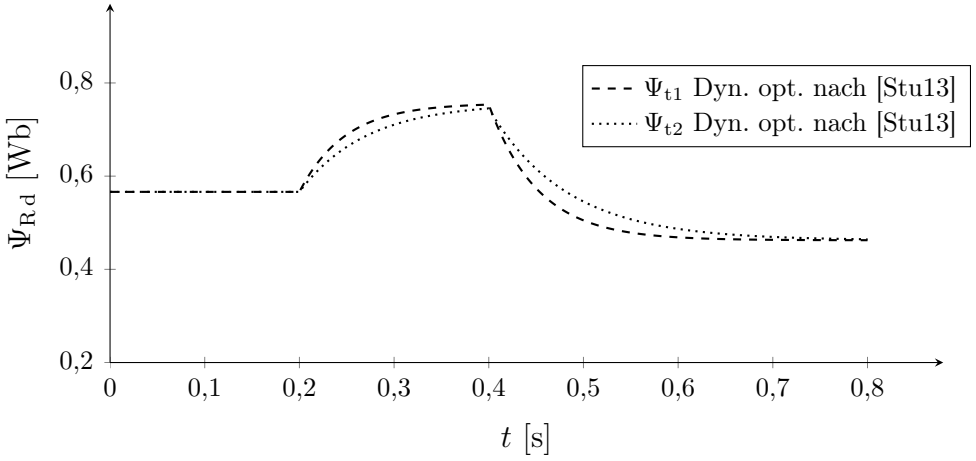
aus Abbildung 6.3 folgend erhält man die passenden effizienten Trajektorien der Rotorflussverkettung. Ausgehend von einer Regelung, die diese exakt realisiert, werden im Anschluss die Verlustleistungen nach dem Modell von Stumper berechnet. Der Vergleich beider Drehmomenttrajektorien und der Verlustleistungen ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Es zeigt sich, dass die Wahl von λ einen Einfluss auf die Höhe der Verlustenergie besitzt. Der Unterschied ist jedoch wider Erwarten recht gering. Und in beiden Fällen deutlich geringer als eine Simulation mit dem stationären Optimum der Flussverkettung über den gesamten Zeitraum ($E_{\mathrm{v\,stat}} = 81{,}4\,\mathrm{J}$).

Neben der Wahl von λ ist auch der gewählte Parameter t_s eine willkürliche Festlegung. Es gibt keinen konkreten Grund, der die Wahl von t_s als Zeitpunkt für die optimale numerische Berechnung von μ_s sonderlich auszeichnet. Dieser kann durchaus ungeeignet sein, wenn die Abweichung in der Nähe des Zeitpunktes sehr groß ist oder die numerische Suche nicht konvergiert, wie im nächsten Absatz an einem Beispiel demonstriert.

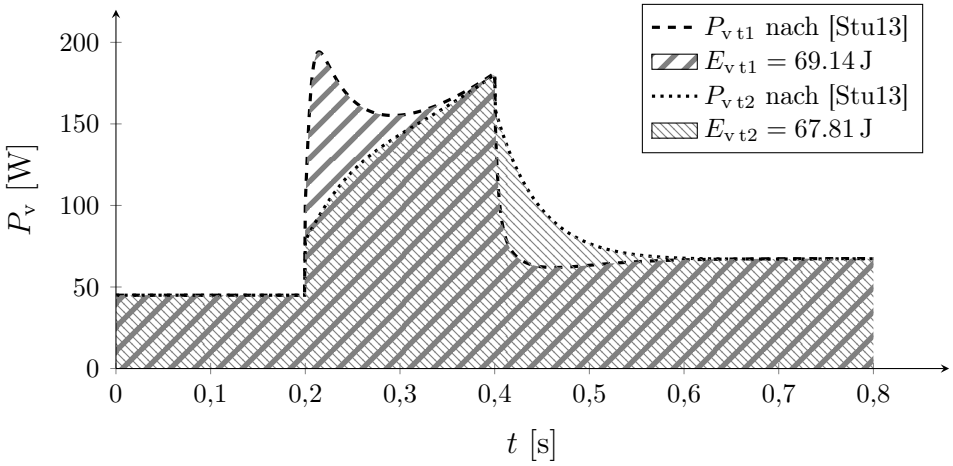
Beim Untersuchen verschiedener Anforderungsprofile fiel auf, dass in bestimmten Fällen die Fehlerfunktion $e(\mu, t_\mathrm{s})$ keinen Nulldurchgang besitzt und infolgedessen die numerische Suche nicht konvergiert. Ein Beispiel ist in Abbildung 6.7 illustriert. Die numerische Suche konvergiert beim positiven Drehmomentsprung nicht im festgelegten Bereich, sichtbar an der Nullstelle außerhalb der Grenzen in Abbildung 6.7c. Der Wertebereich von μ ist durch die inverse Rotorzeitkonstante $\eta = 8{,}9\,\mathrm{s}^{-1}$ unten eingeschränkt und durch die inverse Drehmomentzeitkonstante $\lambda = 200\,\mathrm{s}^{-1}$ der Drehmomenttrajektorie oben begrenzt. Durch die Einschränkung ist $\mu_1 = \eta$. Bei der negativen Drehmomentänderung gibt es keinen Nulldurchgang in der Fehlerfunktion, wie Abbildung 6.7d beweist. Mit $\mu_2 = 200\,\mathrm{s}^{-1}$ ist die obere Grenze des Wertebereichs festgelegt, die bei der numerischen Suche nach einer bestimmten Anzahl Iterationen überschritten wurde. Das Überschreiten lässt sich durch rechtzeitigen Abbruch der Iterationen und Schrittweitenbeschränkung ausschließen und führt infolgedessen zu einem zufälligen Ergebnis für μ innerhalb der Grenzen. Der betrachtete Algorithmus aus [SDK13] ist nicht ausreichend konsistent. Die finalen Funktionen der Abweichung aus Abbildung 6.7e und 6.7f mit den inversen Zeitkonstanten μ_1 und μ_2 zeigen, dass der Fehler stellenweise während des Übergangs sehr groß sein kann. Ebenso zeigen beide, dass die numerische Suche versagt hat, weil an den Stellen $t_{\mathrm{s}1}$ und $t_{\mathrm{s}2}$ die Abweichung näherungsweise Null entsprechen sollte. Das Minimum tritt sichtbar in beiden Fällen zu einem anderen Zeitpunkt ein. Die vorherigen Betrachtungen zeigen, dass die Herangehensweise der Autoren von [SDK13] generell funktioniert. Dies ist jedoch in erster Linie der Einschränkung des Wertebereichs von μ zu verdanken. Dadurch wird



(a) Es wurden zwei repräsentative Werte für λ gewählt. Das führt dazu, dass eine Trajektorie der Vorgabe sehr nah ist und die andere deutlich abweicht.



(b) Die entsprechend geplanten Rotorflussverläufe ähneln sich.



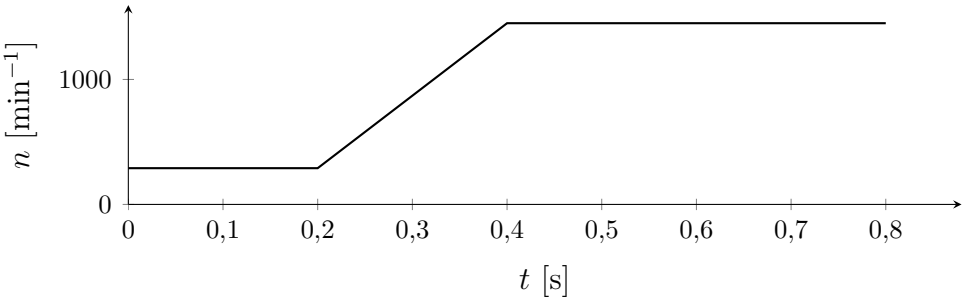
(c) Die Verlustleistungskurven zeigen deutliche Unterschiede.

Abbildung 6.6.: Es werden zwei verschiedene Trajektorien des Drehmomentes bei gleicher Drehmomentvorgabe verglichen. Die Berechnung der Flussgrößen und Verluste erfolgt nach dem Schema 6.3.

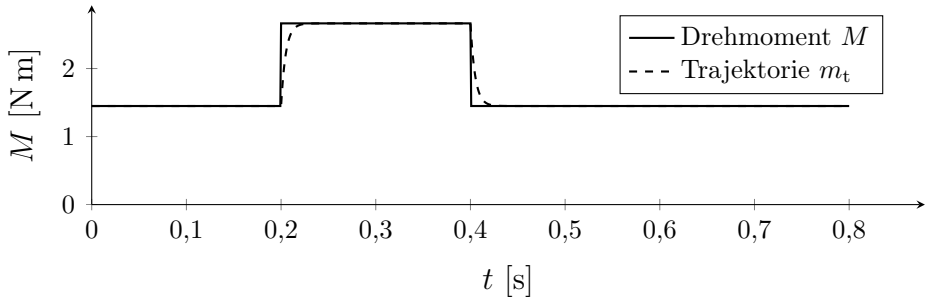
in jedem Fall eine Lösung gefunden. Jedoch entspricht diese nicht immer dem Optimum zum Zeitpunkt t_s. Dies wirkt sich auf die Fehlerfunktionen aus: Während der dynamischen Übergänge können deutliche Fehler entstehen. Es ist hinzuzufügen, dass diese Abweichungen ebenso auftreten, wenn der Algorithmus wie gewünscht funktioniert und bspw. $e(\mu_1, t)$ näherungsweise Null zum Zeitpunkt t_s entspricht. Die Abweichung für $t \neq t_s$ wird nicht beurteilt und kann entsprechend groß oder klein sein.

Die stichprobenartige Untersuchung hat bereits einige Schwächen offenbart. Im Beispiel aus Abbildung 6.7 sind die großen Beträge der Abweichungen während der Vorgangs ablesbar. Es bietet sich an, anhand desselben Drehzahlprofils eine Berechnung der Verluste und Verlustenergien vorzunehmen und diese zu vergleichen um eine absolute Aussage zur Verlustersparnis treffen zu können. Abbildung 6.8 belegt, dass eine weitere Optimierung mehr Verluste einsparen könnte. Es wurden die zwei gängigen Methoden zum Betrieb einer Asynchronmaschine der Methode Stumpers gegenübergestellt. Zum einen gibt es den Betrieb von Maschinen mit konstantem Nennfluss. Der Nennfluss minimiert die Verluste ausschließlich im Nennarbeitspunkt. Zum anderen gibt es eine Flussanpassung, die zu jedem Zeitpunkt entsprechend des Drehmomentes und der Drehzahl den optimalen Fluss unter stationären Bedingungen berechnet. Zusätzlich löst MATLAB die Gleichung 6.3 rein numerisch. Man erhält einen Referenzfluss für das Minimum der Verluste bei gegebener Drehmomenttrajektorie. Die Verläufe der Flussverkettungen in Abbildung 6.8a weichen deutlich voneinander ab. Zum gleichen Ergebnis kommt man bei einem Blick auf die Leistungen in Abbildung 6.8b. Wobei speziell bei dem stationär optimierten Leistungsverlauf sehr hohe Spitzen jeweils am Beginn einer Drehmomentänderung auftreten. Es zeigt sich schließlich in Abbildung 6.8c, dass Stumpers Methode generell funktioniert und trotz des Versagens des Algorithmus für das angenommene Beispiel die Verluste bezüglich der zwei verbreiteten Strategien reduziert. Das numerisch bestimmte Minimum der Verlustenergie für den gesamten Vorgang beträgt $E_{\mathrm{v\,bvp4c}} = 37{,}65\,\mathrm{J}$ und nach der ermittelten Flusstrajektorie von [SDK13] wird eine Verlustenergie in Höhe von $E_{\mathrm{v\,stu}} = 40{,}44\,\mathrm{J}$ erzeugt. Die Verluste übersteigen das Minimum um $\frac{\Delta E_\mathrm{v}}{E_{\mathrm{v\,bvp4c}}} = 7{,}41\,\%$.

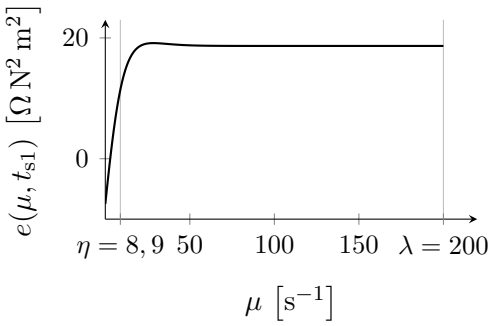
Eine allgemeine Beurteilung bzw. Aussage zur Energieeffizienz ist schwer möglich. Die reduzierte Verlustenergie von Stumper, Dötlinger und Kennel in dynamischen Vorgängen ist in alle Stichproben stets etwas größer als der rein numerisch berechnete Betrag der Verlustenergie. Für viele Profile deutlich geringer als die zwei verbreiteten Ansätze. Eine verallgemeinerte Aussage ist aufgrund der Schwächen in der numerischen Lösung sowie der willkürlichen Wahl der Drehmomenttrajektorie nicht möglich. Erschwerend kommt



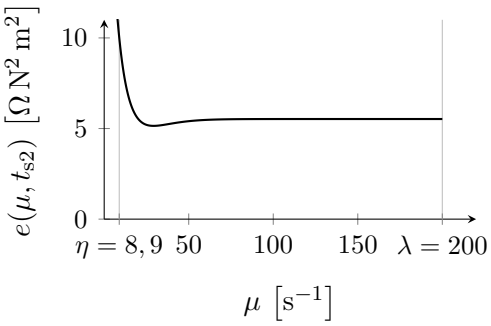
(a) Drehzahlüberführung von $n = 0{,}1\,n_N$ bis $n = 0{,}5\,n_N$ bei Last $M_\mathrm{L} = 0{,}2\,M_N$.



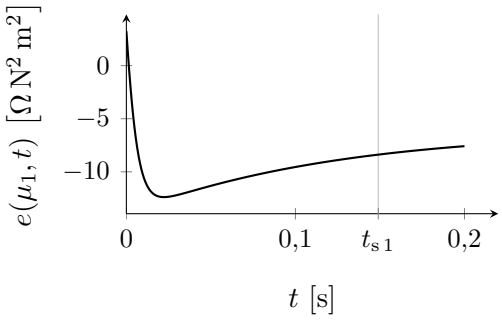
(b) Gefordertes Drehmoment der Asynchronmaschine und geplante Trajektorie.



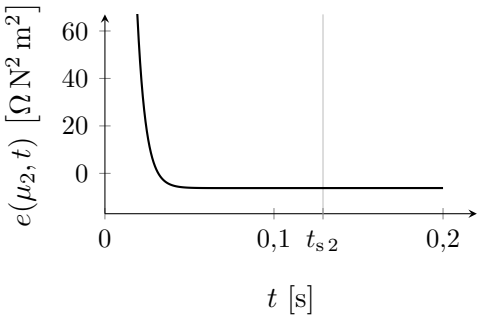
(c) Die Fehlerfunktion des positiven Drehmomentsprungs in Abhängigkeit von μ an der Stelle $t_{\mathrm{s}1} = 0{,}15\,\mathrm{s}$.



(d) Die Fehlerfunktion des negativen Drehmomentsprungs in Abhängigkeit von μ an der Stelle $t_{\mathrm{s}2} = 0{,}13\,\mathrm{s}$.

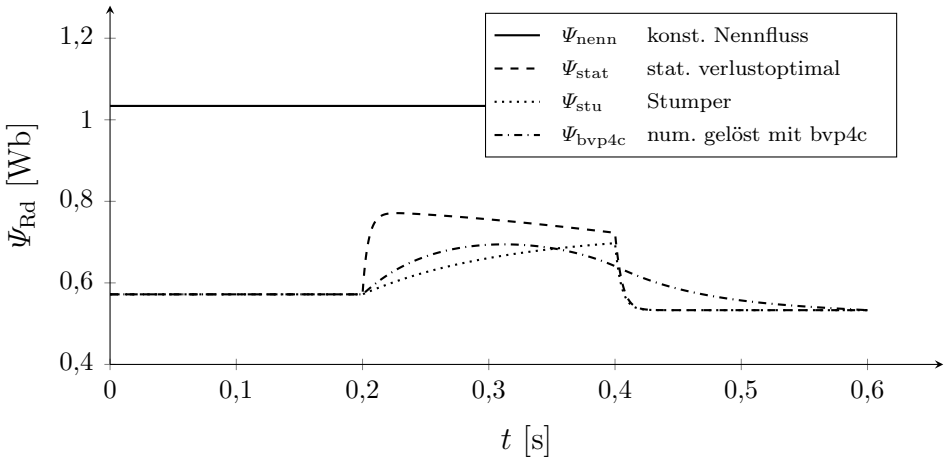


(e) Fehlerfunktion in Abh. von t für $\mu = \mu_1$ beim positiven Drehzahlsprung

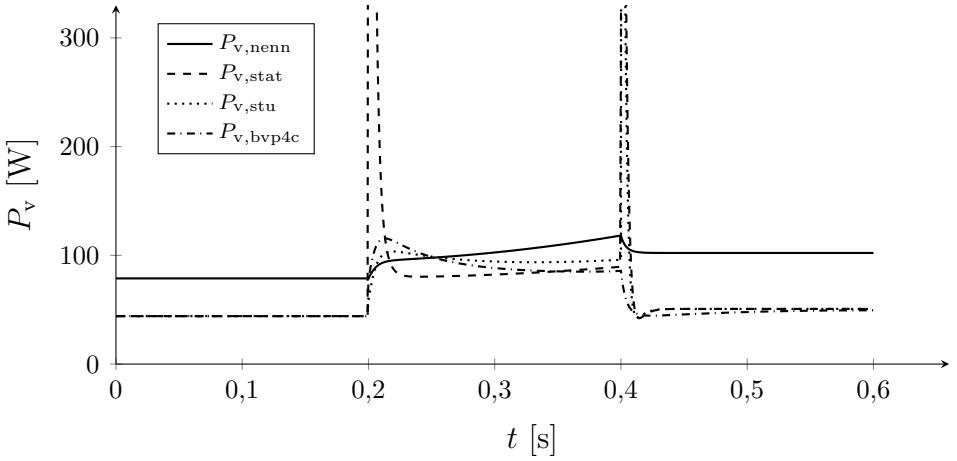


(f) Fehlerfunktion in Abh. von t für $\mu = \mu_2$ beim negativen Drehzahlsprung

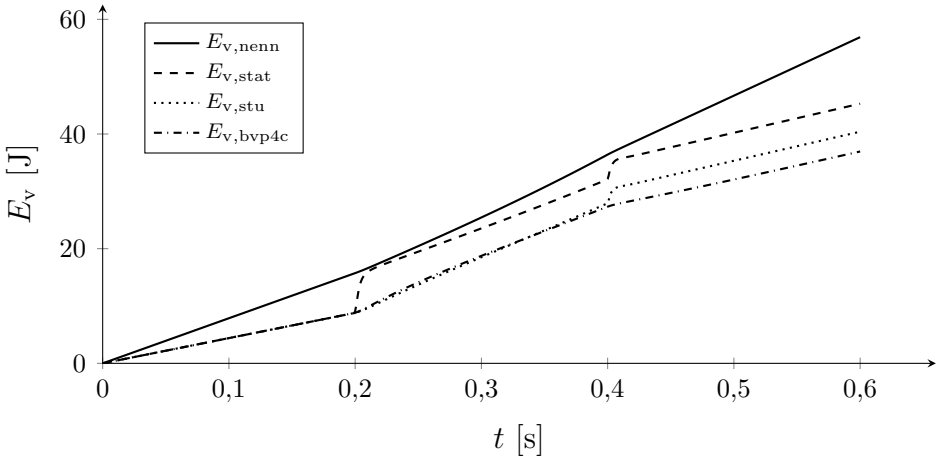
Abbildung 6.7.: Bei dieser Drehzahlüberführung kommt es bei beiden Drehmomentsprüngen zu Fehlerfunktionen, die im möglichen Bereich keinen Nulldurchgang besitzen. Die Newton-Raphson-Methode findet kein optimales μ.



(a) Rotorflussverkettungen berechnet nach verschiedenen Methoden.



(b) Verlustleistungen entsprechend der obigen Rotorflussverkettungen.



(c) Die summierten Verlustleistungen offenbaren Restpotential.

Abbildung 6.8.: Verluste bezüglich des Anforderungsprofils aus Abbildung 6.7 in vier verschiedenen Fällen: Keine Flussanpassung, optimierte Flussanpassung für stationären Betrieb, Flusstrajektorie entsprechend [SDK13] und numerisch optimierte Flusstrajektorie mittels bvp4c.

hinzu, dass einige Schritte methodisch unbegründet sind. Zusammenfassend werden hier nochmals alle Schwächen der Methode angegeben:

1. Das verwendete Verlustmodell beinhaltet nur einen Teil der Eisenverluste.

2. Es gilt a_1 =konstant, obwohl der Koeffizient a_1 abhängig von der Drehzahl ist.

3. Keine Aussage zur Verlustminimierung bei der Wahl der Drehmomenttrajektorie. Die Exponentialfunktion wird durch ein hohes λ zu Gunsten der Reglerdynamik definiert.

4. Die numerische Optimierung erfolgt nur zu einem Zeitpunkt t_s. Aufgrund der Ähnlichkeit der Trajektorien ist außerhalb des Zeitpunktes t_s die Abweichung meist gering, jedoch zu jeder Drehmomenttrajektorie unterschiedlich groß. Eine quantitative Abschätzung gibt es nicht.

5. Die numerische Nullstellensuche konvergiert nicht immer, da die Funktion gelegentlich keine Nullstelle besitzt. Mangelnde Robustheit des Algorithmus.

6. Bei der Lösung handelt es sich nur um eine angepasste Approximation, d. h. es ist noch Potential bei der Verlustreduktion vorhanden.

7. Grenzen der Systemgrößen (z. B. maximaler Phasenstrom) sind in die Trajektorienberechnung nicht einbezogen.

8. Die Methodik aus [SDK13] ist stellenweise nicht nachvollziehbar. Die Optimierung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_s wird nicht ausreichend plausibel hergeleitet, sondern nur durch die Ergebnisse als plausible Annahme gestützt.

Oberste Priorität dieser Arbeit ist einen anderen zuverlässigeren, robusteren Lösungsweg zu gehen, auf diese Weise die Schwächen aus den Punkten 1, 3, 4, 5 und 7 zu meiden. Die Alternative sollte mindestens genauso energiesparend sein wie der diskutierte Ansatz.

6.3. Untersuchung des Zeithorizontes der Flusstrajektorie

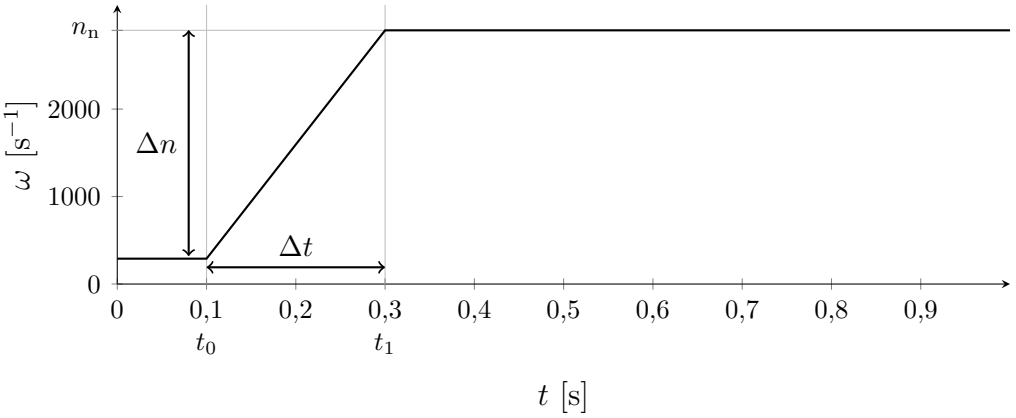
Bezüglich der Überführungszeit Δt der Drehzahl kann die Optimierungsdauer T_Ψ des veränderlichen Flussverlaufs länger sein. Dieser Zeitraum kann beliebig vergrößert werden, maximal jedoch bis zum Start der nächsten Drehzahländerung. Der Ansatz von Stumper hat gezeigt, dass die Berücksichtigung eines größeren Zeitfensters T_Ψ zu größerer Effizienz führt. In Abbildung 6.9 wird der rechte Randwert $\Psi_{\mathrm{Rd,b}}$ zeitlich variiert bei drei verschiedenen Drehzahlüberführungszeiten Δt. Abbildung 6.9b zeigt drei verschiedene Flüsse, deren rechter Randwert zu einem jeweils anderen Zeitpunkt $t_3 = T_\Psi + t_1$ festgelegt wurde. Die teilweise unplausible Flussbahn speziell für sehr große T_Ψ beruht eventuell auf einer Schwäche der Funktion *bvp4c*. Es gibt scheinbar im numerischen Algorithmus ein Problem mit der Unstetigkeit beim Drehmomentsprung. Dennoch ist in Abbildung 6.9c erkennbar, dass besonders für kleine Δt ein größerer Zeitraum T_Ψ für die Flussoptimierung weniger Gesamtverluste bewirkt. Für große Δt birgt dieselbe Maßnahme keinen erkennbaren Nutzen mehr. Ein großer Teil der Verlustoptimierung hängt demnach von der Wahl eines passenden Zeitfensters T_Ψ ab. Es folgt ein Vorschlag, die Anpassung durch eine Funktion in Abhängigkeit der Überführungszeit vorzunehmen. Die Berechnungen zeigen, dass ein Zusammenhang, wie in Abbildung 6.10 schematisch dargestellt, effiziente Ergebnisse produziert. Der minimale Optimierungszeithorizont $T_{\min}$ orientiert sich an einer minimalen Zeit $\Delta t_{\min} = \frac{\omega_{\mathrm{n}} J}{M_{\max}}$, die von dem maximalen kurzfristigen Motormoment $M_{\max}$ abhängt. Je höher der Anfangswert der Funktion, desto effizienter ist der geplante Übergang. Daher soll

$$T_{\Psi,\min} = 3\Delta t_{\min} \tag{6.7}$$

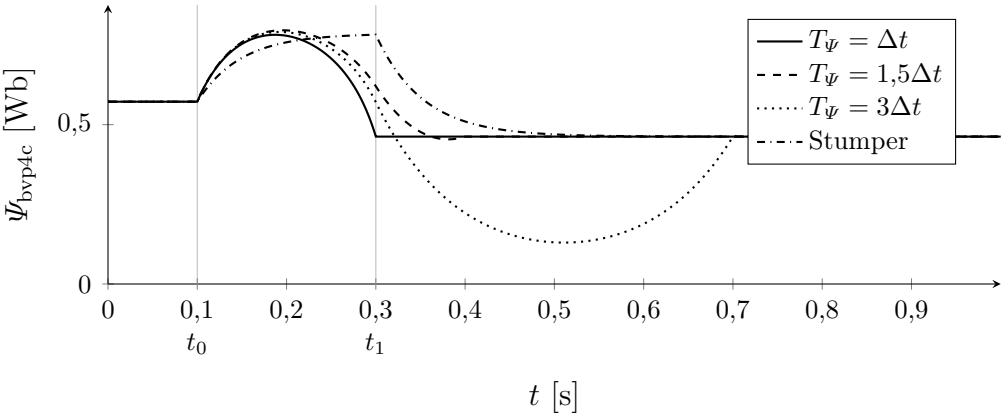
einen ausreichend hohen Starthorizont definieren und eine Exponentialfunktion das langsame Abklingen realisieren. Die dynamischen Flussoptimierungen sollen in allen weiteren Betrachtungen in der festgelegten Dauer

$$T_\Psi = \Delta t + T_{\min} \mathrm{e}^{-\frac{1}{T_{\min}}\Delta t} \tag{6.8}$$

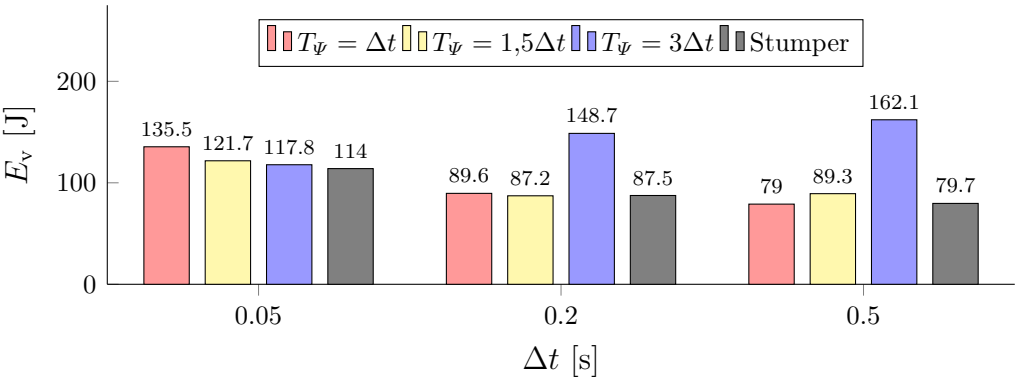
stattfinden.



(a) Die Überführungszeit Δt variiert den Drehzahlwechsel.



(b) Verschiedene Zeithorizonte der Flusstrajektorie bei $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s}$.



(c) Vergleich der Gesamtverluste zu verschiedenen Übergangszeiten Δt mit jeweils drei Zeithorizonten T_Ψ.

Abbildung 6.9.: Ein erhöhter Zeithorizont T_Ψ der dynamischen Flussoptimierung zeigt Effizienzsteigerungen. Für große T_Ψ bei Δt =0,2 s und 0,5 s treten in (c) numerische Probleme auf.

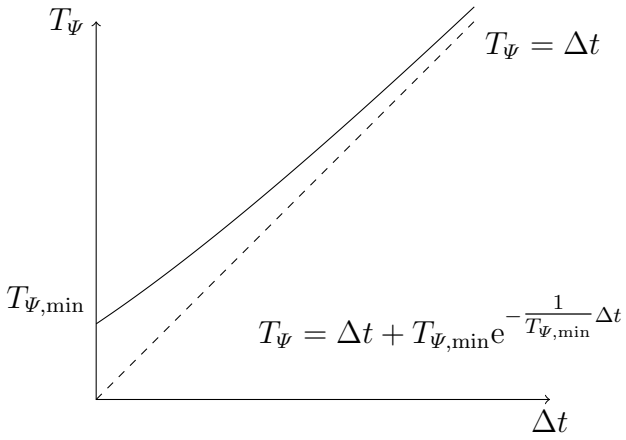


Abbildung 6.10.: Funktion für eine Erweiterung des Optimierungszeitraums T_Ψ für den dynamischen Teil der Flusstrajektorie in Abhängigkeit der Drehzahlüberführung Δt zur Verringerung der Verluste des gesamten Profils.

6.4. Trajektorienplanung auf Basis eines approximierten Verlustmodells

Die Gleichung (5.21) fordert stets eine numerische Lösung. Ein Weg dieses Problem zu umgehen ist das Verlustmodell (5.15) in eine Polynomfunktion mit ganzzahligen positiven Exponenten der Systemgrößen zu überführen. Eine solche Funktion ist leicht zu integrieren und differenzieren. Die Methode der kleinsten Quadrate, angewandt auf den Term $\frac{1}{\Psi_{\mathrm{Rd}}^2}$, überführt das Modell (5.15) in die gewünschte Polynomform, die eine Trajektorienplanung des Flusses vereinfacht.

6.4.1. Modifiziertes Verlustmodell mit Methode der kleinsten Quadrate

Bei der Methode der kleinsten Quadrate handelt sich um ein mathematisches Standardverfahren zur Ausgleichsrechnung. Es wird eine Kurve gesucht, die möglichst nahe an den Punkten einer Datenwolke liegt. Das populärste Beispiel ist die Berechnung einer linearen Regression. Statt einer Datenwolke kann ebenso eine bestehende Funktion durch eine beliebige andere Funktion angeglichen werden. Die benötigten Punkte werden einem begrenzten Wertebereich der Funktion in beliebigen Abständen entnommen. Voraussetzung ist, dass mindestens genauso viele Punkte wie Parameter in der Modellfunktion vorhanden

sind. Die Art der Modellfunktion unterliegt einer beliebigen Wahl und sollte sich in der Regel an gegebenen Daten bzw. der gegebene Funktion orientieren.

Hier ist die Teilfunktion

$$z(\Psi_{\mathrm{Rd}}) = \frac{1}{\Psi_{\mathrm{Rd}}^2} \tag{6.9}$$

gegeben. Ziel ist es, diese durch eine Modellfunktion

$$f(\Psi_{\mathrm{Rd}}) = k_2\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + k_1\Psi_{\mathrm{Rd}} + k_0 \tag{6.10}$$

in Form eines Polynoms anzunähern. Je mehr Werte der Ausgangsfunktion vorgegeben werden, desto exakter kann die Bestimmung der Parameter k_i mit $i = \{0, 1, 2\}$ erfolgen. Zu jedem bekannten Punkt kann die parameterabhängige Differenz der beiden Funktionen betrachtet werden:

$$r_i = f(\Psi_i, k_0, k_1, k_2) - z(\Psi_i). \tag{6.11}$$

Dieser Fehlerausdruck wird auch Residuum genannt. Um die Modellfunktion bestmöglich der Originalfunktion anzupassen, wird eine Bedingung gestellt. Basierend auf der Summe der kleinsten Fehlerquadrate wird ein Minimierungsproblem formuliert:

$$min \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = min \sum_{i=1}^{n} \|f_i(k_0, k_1, k_2) - z_i\|^2. \tag{6.12}$$

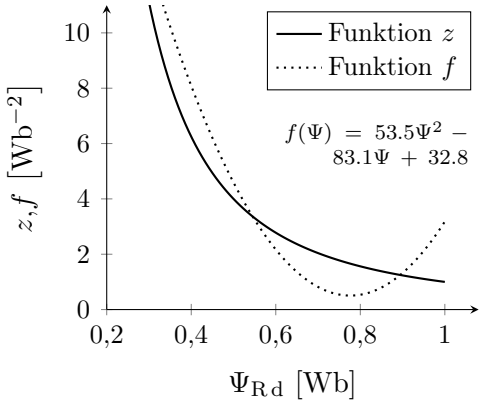
Die Lösung ist eine bestmöglich angenäherte Funktion f mit einer bestimmten Kombination der Koeffizienten k_0, k_1, k_2. Die ermittelte Modellfunktion ersetzt die Originalfunktion im Verlustmodell der Asynchronmaschine. Es ergibt sich aus

$$P_{\mathrm{v}} = a_1\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + a_2\Psi_{\mathrm{Rd}}\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} + a_3\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}^2 + a_4\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{\Psi_{\mathrm{Rd}}^2}}_{\text{ersetzen mit} f(\Psi)} \tag{6.13}$$

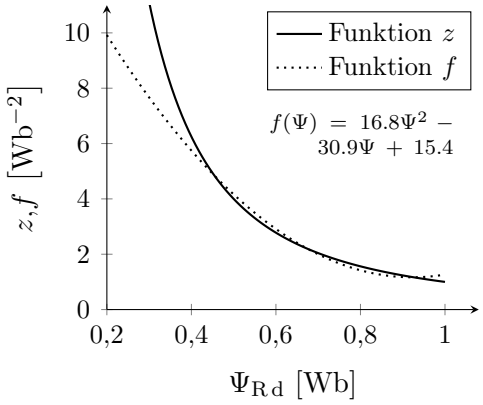
die modifizierte Verlustfunktion

$$P_{\mathrm{v,mod}} = a_1\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + a_2\Psi_{\mathrm{Rd}}\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} + a_3\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}^2 + a_4\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \left(k_2\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + k_1\Psi_{\mathrm{Rd}} + k_0\right). \tag{6.14}$$

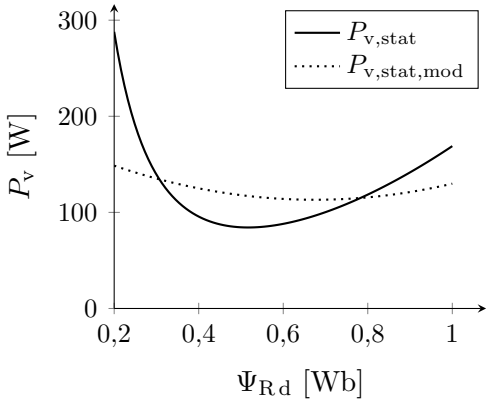
Die ermittelte Lösung für die betrachtete Teilfunktion ist für 100 Punkte in zwei verschiedenen Intervallen von Ψ_{Rd} berechnet wurden: Von 0,2 Wb bis 1,0 Wb und von 0,4 Wb bis 1,0 Wb. Die Originalfunktion und die berechnete Ausgleichsfunktion sind in Abbildung



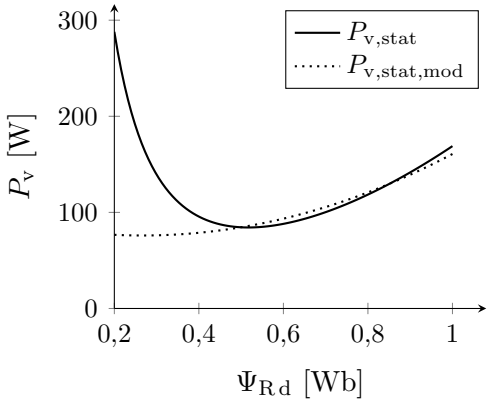
(a) Berechnung von f mit 100 Punkten im Intervall 0,2 Wb bis 1,0 Wb.



(b) Berechnung von f mit 100 Punkten im Intervall 0,5 Wb bis 1,0 Wb.



(c) Einfluss der Näherung aus (a) auf $P_{\mathrm{v,stat}}$.



(d) Einfluss der Näherung aus (b) auf $P_{\mathrm{v,stat}}$.

Abbildung 6.11.: Die Funktion $P_{\mathrm{v,stat}}$ lässt sich in bestimmten Bereichen sehr gut nähern. Die Wahl des Berechnungsintervalls in (b) führt zu einer sehr guten Approximation durch $P_{\mathrm{v,stat,mod}}$ in (d) ab 0,4 Wb.

6.11 gegenübergestellt. Der gewählte Approximationsbereich des Argumentes Ψ hat einen entscheidenden Einfluss. In einem geschickt gewählten Intervall des Definitionsbereichs können die Abweichungen sehr gering sein, wie Abbildung 6.11b demonstriert. Der Fluss in dynamischen Vorgängen bewegt sich meist innerhalb des oberen Intervalls. Die hohe Übereinstimmung mit der Originalfunktion im gewählten Näherungsintervall von 0,4 Wb bis 1,0 Wb ist wiederholt sichtbar beim Vergleich der stationären Verlustleistungen von Originalfunktion und approximierter Variante in Abbildung 6.11d.

Die Näherung erfolgt daher mit der Modellfunktion

$$f(\Psi) = 16{,}8\Psi^2 - 30{,}9\Psi + 15{,}4, \tag{6.15}$$

die mit 100 äquidistanten Punkten im abgeschlossenen Intervall von 0,5 Wb bis 1,0 Wb bestimmt wurde.

Alternativ hätte auch die Taylorentwicklung zur Approximation der Teilfunktion z verwendet werden können. Es ist jedoch eine gute Näherung über einen größeren Argumentenbereich gewünscht. Beim Verfahren nach Taylor erfolgt die Angleichung ausgehend von einem bestimmten Punkt der Originalfunktion. Die Taylorfunktion führt somit zu größeren Abweichungen im gesamten interessanten Bereich der Orginalfunktion (vorausgesetzt die Methoden werden bei gleicher polynomialer Ordnung der Näherungsfunktion verglichen).

6.4.2. Flusstrajektorie aus Euler-Lagrange-Gleichung

Die Verwendung der modifizierten Verlustfunktion (6.14) in der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial P_{\mathrm{v,mod}}}{\partial \Psi_{\mathrm{Rd}}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial P_{\mathrm{v,mod}}}{\partial \dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}}} = 0 \tag{6.16}$$

führt zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} - \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_4}{a_3} k_2 \left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2\right) \Psi_{\mathrm{Rd}} = \frac{9}{8}\frac{p^2}{R_{\mathrm{R}}^2} k_1 \left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 . \tag{6.17}$$

Eine analytische Lösung kann nur für den zeitinvarianten Fall angegeben werden. Dieser besteht, wenn sich die Drehzahl nicht ändert und auch das Lastmoment eine Konstante ist. Dann sind

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_4}{a_3} k_2 \left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 , \tag{6.18a}$$

$$b_2 = \frac{9}{8}\frac{p^2}{R_{\mathrm{R}}^2} k_1 \left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \tag{6.18b}$$

Konstanten und die Lösung von (6.17) ist

$$\Psi_{\mathrm{Rd}} = A\mathrm{e}^{\sqrt{b_1}t} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{b_2}t} - \frac{b_2}{b_1}. \tag{6.19}$$

Die freien Parameter A und B berechnen sich aus den Randbedingungen. Dieser Lösungsansatz kann zukünftig näher untersucht werden. Hier wurde darauf verzichtet, denn drei Punkte sprechen dagegen:

- Die geforderte Drehzahländerung überführt Gleichung (6.17) in eine zeitvariante Differentialgleichung. Grund ist die Abhängigkeit des Parameters a_1 von ω_m (vgl. Abbildung 6.5a).

- Für eine nichtlineare Drehzahlüberführung wird der Term $(J\dot{\omega}_\mathrm{m} + M_\mathrm{L})$ ebenfalls zeitlich variieren.

- Der neue Zeithorizont T_Ψ aus Abschnitt 6.3 erfordert eine zweifache Lösung von (6.19): Zunächst für das Intervall Δt der Drehzahlüberführung mit $\dot{\omega}_\mathrm{m} \neq 0$ und für den anschließenden Teil $T_\Psi - \Delta t$ mit $\dot{\omega}_\mathrm{m} = 0$. Der rechte Randwert der ersten Teilfunktion entspricht dem linken Randwert der zweiten Teilfunktion. Hier bleibt die Frage: Wie kann dieser Randwert der Flusstrajektorie zwischen den Teilfunktionen verlustoptimal bestimmt werden?

Dass heißt, während Drehmoment- und/oder Drehzahländerungen ist die exakte Lösung von Funktion (6.17) nicht möglich. Dies ist nur fehlerbehaftet möglich, wenn Vereinfachungen wie $a_1 = \mathit{konstant}$ getroffen werden. Im nächsten Abschnitt wird eine flexiblere Lösung präsentiert.

6.4.3. Flusstrajektorie als quadratische Funktion

Die betrachteten numerischen Lösungen zur verlustoptimalen Flusskurve ähneln einer Parabel. Anstatt der Exponentialfunktion von Stumper und der Lösung (6.19) wird für den Fluss bei einem Drehzahlwechsel eine quadratische Funktion mit drei Parametern vorgeschlagen:

$$\Psi_\mathrm{Rd} = p_2 t^2 + p_1 t + p_0. \tag{6.20}$$

Die Parameter dieser Trajektorie werden so bestimmt, dass das Polynom den Übergang mit geringster Verlustenergie gewährleistet. Dazu lauten die Randbedingungen:

$$\Psi_{\mathrm{Rd,a}} = p_2 t_0^2 + p_1 t_0 + p_0, \tag{6.21a}$$

$$\Psi_{\mathrm{Rd,b}} = p_2 (t_0 + T_\Psi)^2 + p_1 (t_0 + T_\Psi) + p_0, \tag{6.21b}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{v}(p_0)}{\mathrm{d}p_0} = \frac{\mathrm{d}\left(\int_{t_0}^{t_0+T_\Psi} P_{\mathrm{v,mod}} \mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}p_0} = 0. \tag{6.21c}$$

Es gibt drei Bedingungen und drei unbekannte Parameter. Die Variablen p_2, p_1, p_0 sind in den einzelnen Gleichungen voneinander abhängig und die Differentation von E_v kann nur nach vorherigen Einsetzen der Variablen p_2, p_1 erfolgen. Deren Bestimmung ergibt sich aus den Bedingungen (6.21a) und (6.21b) zu

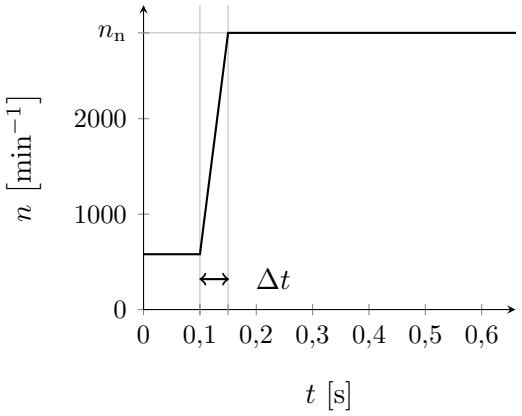
$$p_2 = \frac{\Psi_{\mathrm{Rd,a}} - p_1 t_0 - p_0}{t_0^2}, \tag{6.22a}$$

$$p_1 = \frac{\Psi_{\mathrm{Rd,b}} - p_0 + t_1^2/t_0^2 (p_0 - \Psi_{\mathrm{Rd,a}})}{-t_1^2/t_0 + t_1}. \tag{6.22b}$$

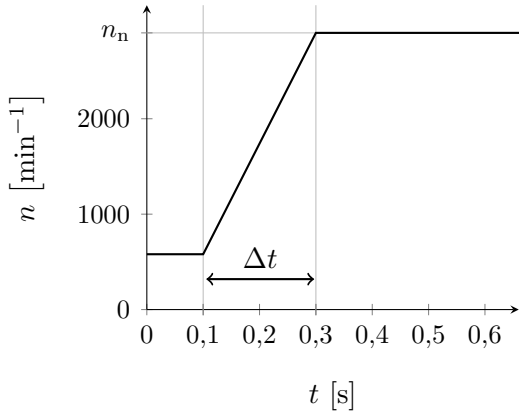
Nach dem Einsetzen erhält man die Verlustenergie als Funktion $p_0 \mapsto E_\mathrm{v}(p_0)$ und kann die dritte Bedingung korrekt aufstellen und berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{v}}{\mathrm{d}p_0} = 0. \tag{6.23}$$

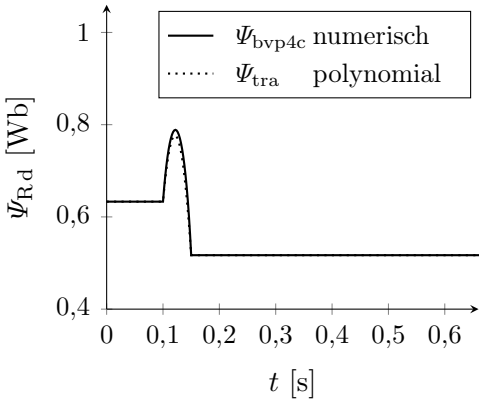
Die Parameter p_0, p_1, p_2 erhält man durch Lösung des Gleichungssystems analytisch. Die Lösungsterme sind sehr „lang“, daher wird hier auf die Angabe verzichtet.



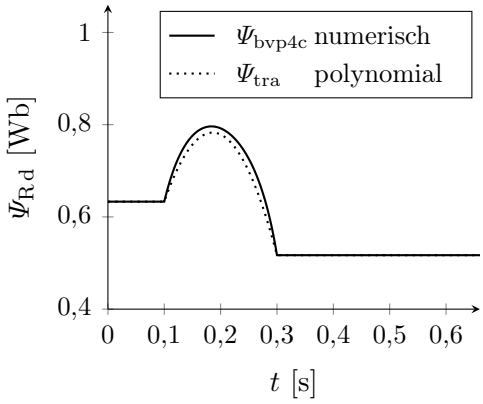
(a) Schneller Übergang von $\omega_{\mathrm{m}\,0} = 0{,}25\omega_\mathrm{n}$ in $\Delta t = 0{,}15\,\mathrm{s}$.



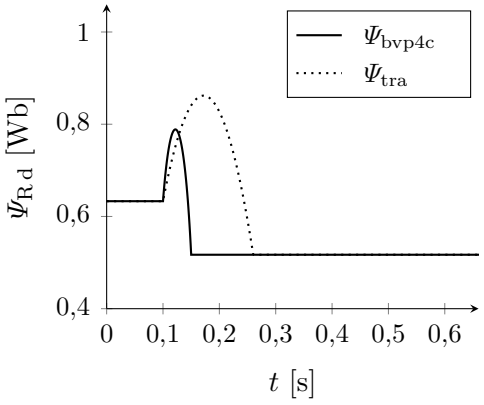
(b) Langsamer Übergang von $\omega_{\mathrm{m}\,0} = 0{,}25\omega_\mathrm{n}$ in $\Delta t = 0{,}3\,\mathrm{s}$.



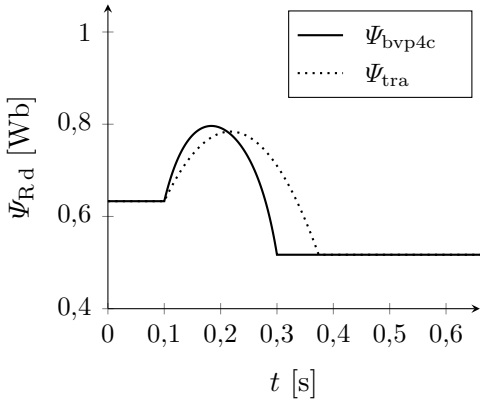
(c) Polynomiale Flusstrajektorie weicht geringfügig ab, $T_\Psi = \Delta t$.



(d) Abweichungen etwas größer bei langsamen Wechsel, $T_\Psi = \Delta t$.



(e) Geringere Verluste trotz Abweichung, vergrößerte Zeit T_Ψ.



(f) Geringere Verluste bei langsamem Wechsel, vergrößerte Zeit T_Ψ.

Abbildung 6.12.: Die optimale numerische Lösung und die Lösung durch die Parabelthese stimmen bei unterschiedlichen Drehzahlprofilen nahezu überein. Mit dem angepassten Zeithorizont aus (6.8) weicht das Polynom in (e) und (f) stark vom numerischen Optimum für die Überführungszeit Δt ab. Die Gesamtverluste sind jedoch geringer. Des Weiteren wurde eine konstante Last $M_\mathrm{L} = 0{,}25M_\mathrm{n}$ angenommen.

Der Vergleich der berechneten Parabel und der numerischen Lösung ist in Abbildung 6.12 für zwei unterschiedliche Drehzahlprofile zu sehen. Die Abweichungen sind sehr gering, wenn die Übergangszeit der Drehzahlüberführung dem Zeithorizont der optimierten Parabel entspricht ($\Delta t = T_\Psi$). Mit vergrößerter Optimierungsdauer T_Ψ laut Gleichung (6.8) entstehen Flusstrajektorien entsprechend Abbildungen 6.12e und 6.12f. Die dazugehörigen Energieverluste sind in Abbildung 6.13 aufgetragen (berechnet zum Zeitpunkt$t = 0{,}6\,\mathrm{s}$). Die quadratische Flusstrajektorie ist dank des größeren Zeithorizontes T_Ψ sogar sparsamer als die optimal numerisch-berechnete Flusstrajektorie. Das trifft für den schnellen Drehzahlwechsel und die etwas langsamere Überführung zu.

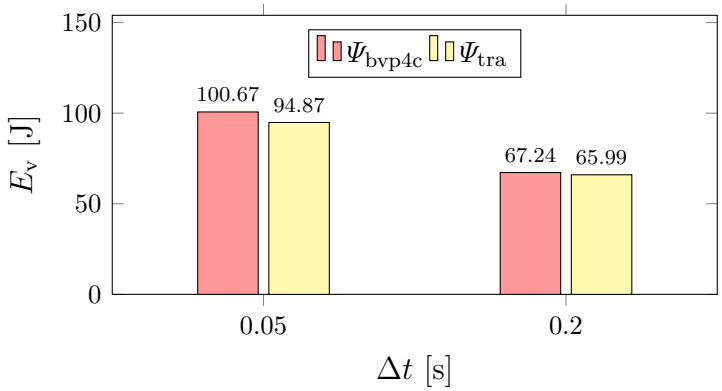


Abbildung 6.13.: Der erhöhte Zeithorizont T_Ψ macht die quadratischen, verlustoptimierten Trajektorien effizienter als die numerische Lösung für die Übergangszeit Δt. Zur Berechnung der Verlustenergie wurden die Flusskurven aus den Abbildungen 6.12e und 6.12f verwendet.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist die hohe Flexibilität, da in der Integration in Gleichung (6.21c) auch zeitabhängige Parameter und Drehmomentfunktionen einführbar sind. Für die Trajektorienplanung mit vergrößerter Optimierungsdauer ist dieses Verfahren sehr geeignet und wird in den Experimenten verwendet. Ein Nachteil sind Abweichungen vom Optimum, die durch zwei Approximationen entstehen: Zum einen die Näherung der Verlustfunktion durch die Methode der kleinsten Quadrate und zum anderen die Hypothese einer quadratischen Flusstrajektorie. Der andere Nachteil ist typisch für alle modellbasierten Ansätze. Die Genauigkeit der Lösung hängt stark von einer sehr guten Parameteridentifikation ab. Speziell die Bestimmung des Rotorwiderstandes R_R einer Asynchronmaschine mit Käfigläufer ist oft fehlerbehaftet und außerdem schlupf- und temperaturabhängig [Leo00, S. 269 ff.].

7. Regelungsentwurf

Der grundsätzliche Aufbau einer rotorflussorientierten Regelung wurde bereits oft in der Literatur beschrieben. Bücher wie [Leo00, Sch09] enthalten einen guten Überblick. Basis für den Entwurf bildet die Abbildung 7.1. Die Referenztrajektorien der Regelung sind durch den optimalen Rotorfluss $\Psi_{\mathrm{Rd,ref}}$ und das vorgegebene Drehzahlprofil $\omega_{\mathrm{m,ref}}$ fest vorgeschrieben. Insgesamt vier Regler bestimmen das Verhalten der Regelung und sorgen für geringe Abweichungen zwischen Sollwerten und Istwerten. Die Regelgröße bzw. der Ist-wert des Rotorflusses Ψ_{Rd} ist schwer messbar, daher wird die Regelabweichung des Rotorflusses

$$e_{\Psi} = \Psi_{\mathrm{Rd,ref}} - \tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} \tag{7.1}$$

mit Hilfe des Schätzwertes $\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}}$ aus einem modellbasierten Beobachter ermittelt. Der Istwert der Drehzahl ist durch einen Inkrementalgeber messbar und liefert ω_{m}. Die Drehzahlregelabweichung

$$e_{\omega} = \omega_{\mathrm{m,ref}} - \omega_{\mathrm{m}} \tag{7.2}$$

ergibt den Eingang des Drehzahl-PI-Reglers. Die Stellgrößen der erwähnten Regler sind identisch zu den Sollwerten der Ströme des unterlagerten Stromregelkreises $I_{\mathrm{Sd,ref}}$ und $I_{\mathrm{Sq,ref}}$. Messung der Statorströme und anschließende Transformation mit Hilfe des geschätzten Rotorflusswinkels liefert die benötigten Regelgrößen $\tilde{I}_{\mathrm{Sd}}$ und $\tilde{I}_{\mathrm{Sq}}$ für die Eingänge der Strom-PI-Regler:

$$e_{id} = I_{\mathrm{Sd,ref}} - \tilde{I}_{\mathrm{Sd}} \tag{7.3a}$$

$$e_{iq} = I_{\mathrm{Sq,ref}} - \tilde{I}_{\mathrm{Sq}} \tag{7.3b}$$

Die Transformation der natürlichen Komponenten in das rotorflussorientierte Koordinatensystem wurde in Kapitel 3 vorgestellt. Dort wurde die komplexe Transformationsvorschrift (3.13) verwendet. Hier werden die Transformationen nochmals in Matrixdarstel-

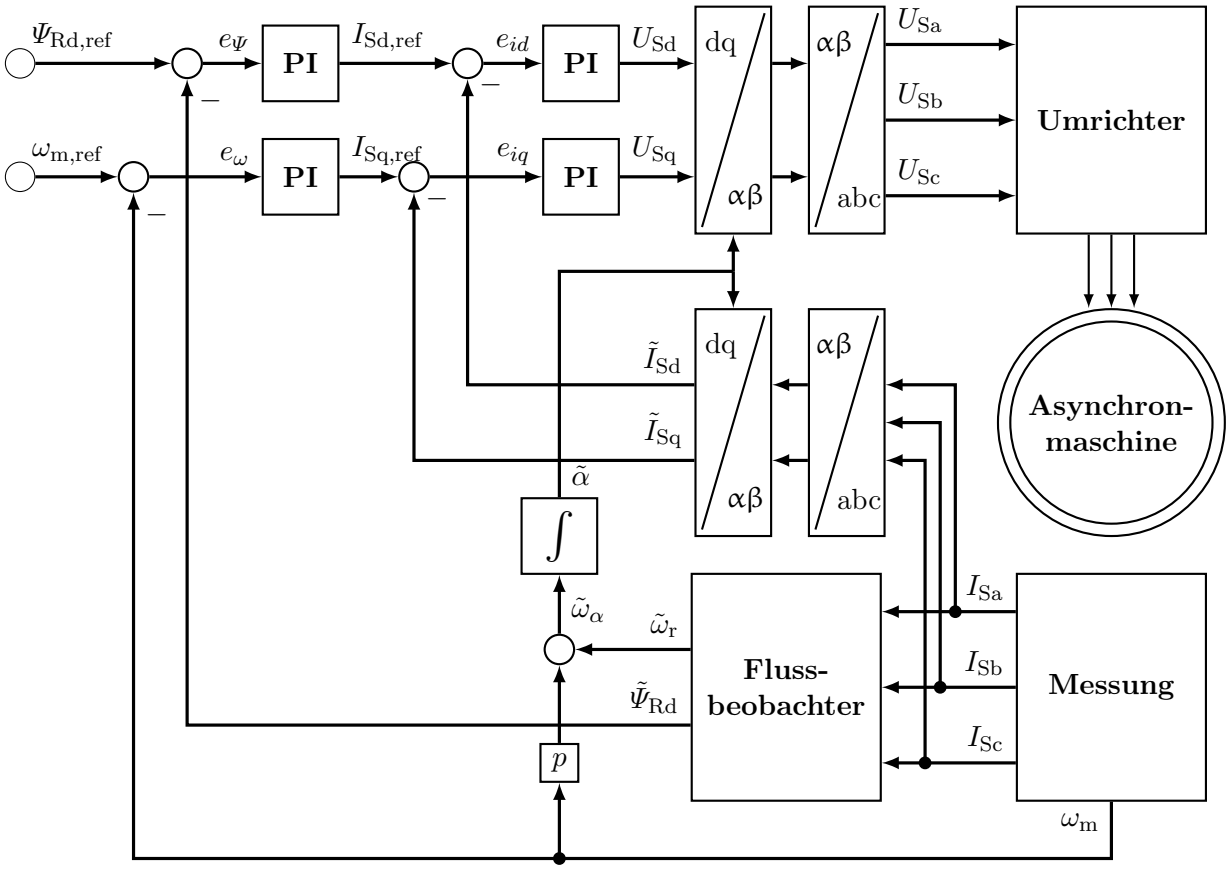


Abbildung 7.1.: Herkömmliche Rotorflussregelung einer Asynchronmaschine. Die gemessenen Größen und das verwendete Beobachtermodell variieren je nach Ausführung.

lung aufgeführt, da diese Berechnung der Implementierung entspricht. Zunächst erfolgt der Übergang der natürlichen Komponenten in die αβ0-Komponenten durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\mathrm{a} \\ i_\mathrm{b} \\ i_\mathrm{c} \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

auch Clarke-Transformation genannt [Cla50]. Die Rücktransformation lautet

$$\begin{pmatrix} i_\mathrm{a} \\ i_\mathrm{b} \\ i_\mathrm{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Anschließend können die αβ-Komponenten des stationären Koordinatensystems mit Hilfe des Rotorflusswinkels α in das umlaufende dq-Koordinatensystem transformiert werden

[Par29]. Entsprechend

$$\begin{pmatrix} i_\mathrm{d} \\ i_\mathrm{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

erhält man die gesuchten dq-Komponenten. Die inverse Parktransformation

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\mathrm{d} \\ i_\mathrm{q} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

benötigt ebenso den Winkel α.

7.1. Flussbeobachter

Die Erfassung von Rotorfluss Ψ_Rd und Winkellage α des dq-Koordinatensystems ist von entscheidender Bedeutung für die Umsetzung des feldorientierten Regelungsverfahrens. Der Flussregler benötigt den korrekten Betrag und die Koordinatentransformationen benötigen den Winkel zum Entkoppeln der Regelstrecke von den Reglern.

Zur Bestimmung gibt es Messverfahren oder modellbasierte Verfahren zur Schätzung des Rotorflusses. Die modellbasierten Ansätze vereinen verschiedene Vorteile [Leo00]:

- Flusssignale beruhen nicht auf einzelnen örtlichen Messwerten der Sensoren und sind daher unabhängig von Ständerwiderstand und Nutoberschwingungen
- Verwendung von normalen Asynchronmaschinen ohne entsprechende Einbauten ist möglich
- Modell liefert unmittelbar die benötigten Signale für die Regelung

Dagegen stehen Nachteile hinsichtlich der Genauigkeit des modellbasierten Ansatzes. Diese hängt stark von einzelnen Parametern ab, wie z. B. der Rotorzeitkonstanten $\tau_\mathrm{R} = {}^{L_\mathrm{R}}/_{R_\mathrm{R}}$. Am Versuchsstand sind keine messtechnischen Einbauten zur direkten Erfassung der Rotorflussverkettung vorhanden. Das macht die Verwendung eines modellbasierten Beobachters unausweichlich.

Im Buch [Leo00] stellt der Autor einen einfachen Flussbeobachter vor: Die Sensorik der Ständerströme liefert deren Momentanwerte. Diese werden in zwei Schritten in dq-Koordinaten transformiert. Aus Gleichung (3.15d) erhält man durch Integration den Transformationswinkel und der Betrag des Rotorflusses ergibt sich durch Lösung der Differentialgleichung (3.15c), d. h. der Beobachter löst folgende zwei Gleichungen:

$$\dot{\tilde{\Psi}}_{\mathrm{Rd}} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} + \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_{\mathrm{R}}}\tilde{I}_{\mathrm{Sd}}, \tag{7.8a}$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} \quad = \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_{\mathrm{R}}}\frac{\tilde{I}_{\mathrm{Sq}}}{\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}}} + p\,\omega_{\mathrm{m}}. \tag{7.8b}$$

Genau genommen handelt es sich um einen Simulator. Für einen Beobachter müsste der entsprechende Stabilitätsnachweis erbracht werden. In der Quelle wird dieses Modell ohne Beobachternachweis als solcher eingeführt. Auf den Nachweis wird hier auch verzichtet und nur auf das Fehlen hingewiesen.

Außerdem führt $\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = 0$ zu einer Singularität (Definitionslücke) in Gleichung (7.8b). Das Eintreten wird durch zwei Maßnahmen verhindert: Der Schätzwert wird bei Freigabe der Regelung mit $\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = 0{,}01\,\mathrm{Wb}$ initiiert und dauerhaft nach unten begrenzt. Nach der Wahl des Modells zur Schätzung des Flusses folgt die Parametrierung der PI-Regler, welche entscheidend für das Verhalten der Regelung ist.

7.2. Realisierung der PI-Regler

Die Anzahl der PI-Regler beträgt zunächst vier. Zwei unterlagerte PI-Regler (Folgeregler), die auf die Referenzwerte der Ströme $I_{\mathrm{Sd,ref}}$ und $I_{\mathrm{Sq,ref}}$ reagieren und zwei überlagerte PI-Regler (Führungsregler) zuständig für Rotorfluss- und Drehzahlregelung der Asynchronmaschine. Die Integration der Reglergleichung

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = K_{\mathrm{I}}e(t) + K_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.9}$$

gibt den Wert der Stellgröße u in Abhängigkeit der Regelabweichung e an, wobei $K_{\mathrm{I}} = \frac{K_{\mathrm{P}}}{T_{\mathrm{N}}}$ gilt. Das Verhalten wird durch die Proportionalverstärkung K_{P} und die Nachstellzeit T_{N} parametriert.

Tabelle 7.1.: Parametrierung der PI-Regler

K_{PI} in $\frac{V}{A}$	T_{NI} in ms	$K_{P\Psi}$ in $\frac{A}{Vs}$	$T_{N\Psi}$ in ms	$K_{P\omega}$ in As	$T_{N\omega}$ in ms
40	8,15	922	200	0,8	90

Das Verhalten der PI-Regler muss in einem Mikrocomputer implementiert werden. Dazu überführt das Vorwärts-Euler-Verfahren mit den Vorschriften

$$x(t) = x_k, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t} \text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots, k_{\max} \tag{7.10}$$

Gleichung (7.9) in die Differenzengleichung

$$u_k = K_P \left(1 + \frac{\Delta t}{T_N}\right) e_k - K_P e_{k-1} + u_{k-1}. \tag{7.11}$$

In der Programmierung wird Δt durch die Abtastzeit T_a ersetzt. Die Diskretisierung der kontinuierlichen Signale erfolgt zu den Zeitpunkten $t = kT_a$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, k_{\max}$. Der Code in MATLAB sieht folgendermaßen aus

```
function [u,e_speichern] = pi(e,e_alt,u_alt,Ta,Kp,Tn)
u = Kp*e + Kp*Ta/Tn*e - Kp*e_alt + u_alt; %Berechnung
e_speichern = e; %Ausgabe der Regelabweichung zur Rueckfuehrung
end
```

Nach einer Erstparametrierung anhand der Maschinenparameter aus Tabelle 8.1 folgten Korrekturen am Versuchsstand und schließlich wurden die Reglerparameter nach Tabelle 7.1 gewählt.

Bemerkung 4 *Ein Grund für die Korrekturen der Parameter ist die Verwendung eines Messfilters für den Ausgang des Inkrementalgebers. Der Inkrementalgeber gibt zwei phasenverschobene Pulsfolgen aus. Durch gleichzeitige Auswertung verringert sich die Auflösung auf ein Viertel. Bei einer Abtastzeit von* $T_a = 100\,\mu s$ *und* 1024 *Impulsen pro Umdrehung beträgt folglich die Auflösung* $\Delta n = \frac{1}{4 \cdot 100\,\mu s \cdot 1024} = 146{,}48\,\mathrm{min}^{-1}$. *Der notwendige Messfilter ist ein Filter 1.Ordnung. Eine gute Wahl der Filterzeitkonstante ist* $T_{filter} = 12\,T_a$ *laut [Sch09].*

7.3. Flachheitsbasierte PI-Regler

Die verbreiteten Regler P, PI und PID verarbeiten ausschließlich die Regelabweichung e als Eingangsgröße. Eine andere Reglergleichung erhält man aus der Vorgabe einer Fehlerdynamik der Form

$$\dot{e} + ke = 0. \tag{7.12}$$

Diese soll das Trajektorienfolgeverhalten verbessern. Der reelle Faktor k ist in seinem Definitionsbereich frei wählbar. Es gilt $k > 0$. Die Berechnung der Reglerfunktion aus dem gewünschten Verhalten (7.12) wird in den nächsten Abschnitten jeweils für den Flussregelkreis und Drehzahlregelkreis durchgeführt.

7.3.1. Reglergleichung für Ψ_{Rd}

Mit $e = \Psi_{\mathrm{Rd,ref}} - \tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}}$ erhält man aus (7.12)

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd,ref}} - \dot{\tilde{\Psi}}_{\mathrm{Rd}} + k\left(\Psi_{\mathrm{Rd,ref}} - \tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}}\right) = 0. \tag{7.13}$$

Einsetzen der Modellgleichung (7.8a) für $\dot{\tilde{\Psi}}_{\mathrm{Rd}}$ führt zu folgender Darstellung:

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd,ref}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} - \frac{L_{\mathrm{M}}}{\tau_{\mathrm{R}}}\tilde{I}_{\mathrm{Sd}} + k\left(\Psi_{\mathrm{Rd,ref}} - \tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}}\right) = 0 \tag{7.14}$$

Die Fehlerdynamik wird erfüllt, wenn der Eingangsstrom des Beobachtermodells exakt dem Stellstrom des Rotorflussreglers entspricht. Es wird ein Integrierglied hinzugefügt um bleibende Regelabweichungen zu verhindern. Die Reglergleichung zur Berechnung der Stellgröße lautet dementsprechend

$$I_{\mathrm{Sd,ref}} = \frac{\tau_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}}\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd,ref}} + \frac{1}{L_{\mathrm{M}}}\tilde{\Psi}_{\mathrm{Rd}} + k_{\Psi}^{*}\left(e_{\Psi} + \frac{1}{T_{\mathrm{n},\Psi}}\int_{0}^{t} e_{\Psi}\,dt'\right) \tag{7.15}$$

mit $k_{\Psi}^{*} = \dfrac{\tau_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{M}}}k_{\Psi}$.

7.3.2. Reglergleichung für ω_m

Nach dem gleichen Muster wird für den Drehzahlregler vorgegangen. Die Fehlergleichung lautet

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m,ref}} - \dot{\omega}_\mathrm{m} + k_\omega \left(\omega_{\mathrm{m,ref}} - \omega_\mathrm{m}\right) = 0 \tag{7.16}$$

entsprechend hergeleitet aus (7.12). Dank der Eigenschaft der Flachheit und der Trajektorienplanung kann die Ableitung der mechanischen Winkelgeschwindigkeit aus dem Modell berechnet werden, wodurch keine Differentiation der Messgröße ω_m notwendig ist. Dies erzeugt oft unerwünschte Stellsignale. Ersetzung von $\dot{\omega}_\mathrm{m}$ durch die Modellgleichung (3.17b) führt zu

$$\dot{\omega}_{\mathrm{m,ref}} - \frac{1}{J}\left(\frac{3}{2}\frac{L_\mathrm{M} p}{L_\mathrm{R}}\tilde{\Psi}_\mathrm{Rd} I_\mathrm{Sq} - M_\mathrm{L}\right) + k_\omega \left(\omega_{\mathrm{m,ref}} - \omega_\mathrm{m}\right) = 0 \tag{7.17}$$

Etwaige Störungen durch Lastmomente muss ein zusätzlicher I-Anteil ausregeln. Die Stellgröße ergibt sich final zu

$$I_{\mathrm{Sq,ref}} = \left(\frac{2}{3}\frac{J L_\mathrm{R}}{L_\mathrm{M} p}\right)\frac{1}{\Psi_{\mathrm{Rd,ref}}}\dot{\omega}_{\mathrm{m,ref}} + \frac{k_\omega^*}{\Psi_{\mathrm{Rd,ref}}}\left(e_\omega + \frac{1}{T_{\mathrm{N}\omega}}\int_0^t e_\omega dt'\right) \tag{7.18}$$

mit $k_\omega^* = \frac{2}{3}\frac{L_\mathrm{R}}{L_\mathrm{M}}\frac{J}{p}k_\omega$. Der PI-Anteil muss nur kleine Abweichungen, hervorgerufen durch den Unterschied zwischen Modell und realem System sowie Störgrößen, regeln. Die Bezeichnung flachheitsbasierter PI-Regler adressiert die Ausführung basierend auf der Fehlerdynamik (7.12), wogegen die Ausführung aus Abschnitt 7.2 einfach mit PI-Regler bezeichnet wird. Beide Varianten werden in den Ergebnissen verglichen.

Dank der Eigenschaft der Flachheit und der Trajektorienplanung kann die Ableitung der Regelabweichung ohne Messgrößen vorgegeben werden, wodurch die Differentiation keine unerwünschten Stellsignale erzeugt.

7.4. Anti-Windup-Methode

In realen Systemen werden im Normalfall Stellsignale begrenzt bzw. sind durch das Systemverhalten begrenzt. Diese Begrenzung führt zum sogenannten *windup*-Effekt durch den I-Anteil des PI-Reglers. Während ein Stellsignal begrenzt ist, kommt es zum weiteren Auf-

integrieren bei vorhandener Regelabweichung. Ohne *anti-windup*-Methode wird bei einem Vorzeichenwechsel der Regeldifferenz e die Stellgröße durch den „gesammelten“ Ausgang der Integration dominiert. Entsprechend Abbildung 7.2 wird dem Integratorausgang mit einer Rückführung der Signaldifferenz $e_{\text{windup}} = u_{\text{begrenzt}} - u_{\text{stell}}$ entgegengesteuert. Über eine wählbare positive Verstärkung K_{WU} wirkt diese zusätzlich auf den Ausgang. Allerdings gibt es diese Rückkopplung nur wenn $e_{\text{windup}} \neq 0$, sprich nur wenn die Stellgröße die Grenzen überschreitet. Das Konzept ist u. a. in [Sch09, Ngu14] illustriert und diese Implementierung wurde in allen Reglern verwendet.

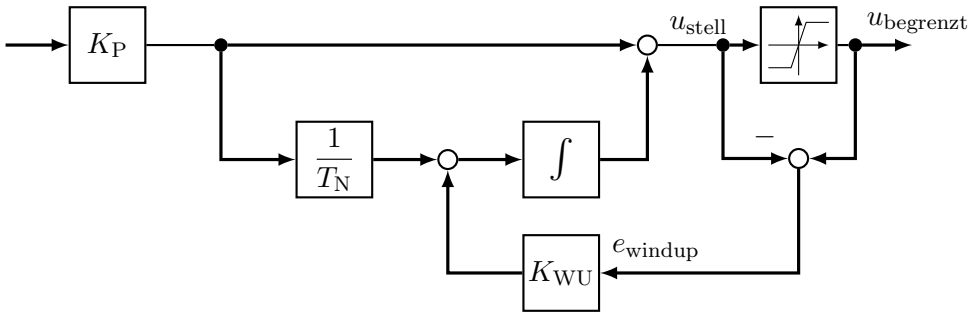


Abbildung 7.2.: Signalflussplan eines PI-Reglers mit Anti-windup-Maßnahme

Bemerkung 5 *Mit der Erweiterung und einer Anti-windup-Implementierung sieht die Umsetzung als* MATLAB *-Block etwa so aus*

```
function [u_begrenzt,u,e_speichern] =pi(e,e_alt,u_alt,u_alt_begrenzt,Ta,
    Kp,Tn,K_windup,u_max,u_min)
% --- Initialisierung
e_speichern = e;%Ausgabe der Regelabweichung zur Rueckfuehrung
% --- Stellgroesse berechnen mit Antiwindup
e_windup = (u_alt_begrenzt-u_alt);       %Regeldifferenz fuer Antiwindup
u =  Kp*e+Kp*Ta/Tn*e-Kp*e_alt+u_alt+K_windup*Ta/Tn*e_windup;
% --- Stellgroesse begrenzen
if       (u > u_max), u_begrenzt = u_max; %obere Grenze
elseif   (u < u_min), u_begrenzt = u_min; %untere Grenze
else                  u_begrenzt = u;
end
end
```

8. Experimente

8.1. Aufbau des Teststandes

Die zu regelnde Maschine ist ein Asynchronmotor von Siemens, Typbezeichnung 1LA7113-4AA10, gekoppelt an eine Gleichstrommaschine desselben Herstellers des Typs 1GG5106. Letztere kann als Lasterzeuger aktiv zugeschaltet werden kann. Alle dokumentierten Größen der Antriebsmaschine sind in Tabelle 8.1 einsehbar und entstammen den Datenblättern des Herstellers [Dokumentation Antriebsteststand am Lehrstuhl der Leistungselektronik, TU Dresden, 11.03.2014].

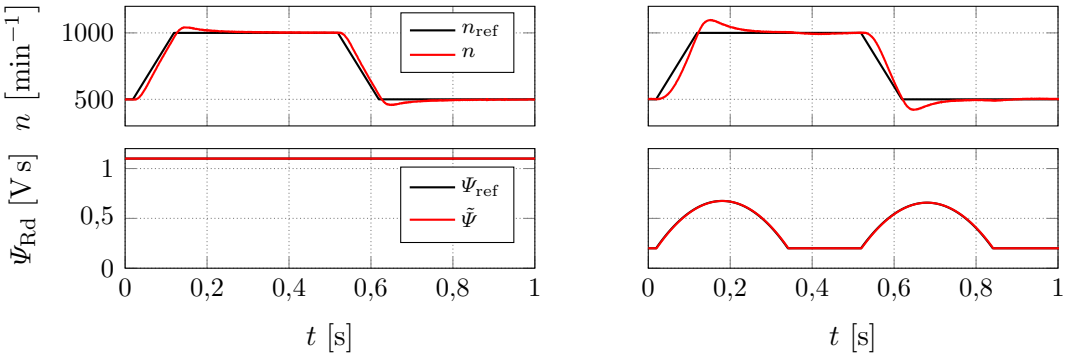
Die Statorwicklungen der Asynchronmaschine werden durch einen Frequenzumrichter gespeist, der in einem Schaltschrank installiert ist. Beginnend auf der Netzseite reihen sich funktionell Gleichrichter, Spannungszwischenkreis und spannungsgespeister Wechselrichter aneinander und bilden so den Frequenzumrichter. Der Dioden-Brückengleichrichter ist ungesteuert. Die Halbleiter des Wechselrichters werden durch Lichtwellensignale angesteuert. So wechseln die IGBTs zwischen Durchlass- und Sperrbetrieb und stellen die Spannung des Zwischenkreises für die Wicklungen der Maschine zur Verfügung. Die Signale für die Lichtwellenleiter generiert eine DS1103-Karte von dSpace. In Testläufen der Regelung wurde der Frequenzumrichter durch einen Stelltransformator gespeist. Für die Experimente wurde auf Netzversorgung umgestellt. Somit betrug die Zwischenkreisspannung $U_{\mathrm{dc}} = 580\,\mathrm{V}$. Zudem sind verschiedene Messeinrichtungen vorhanden. Es können die Netzströme, Netzspannungen, Wicklungsströme und die Zwischenkreisspannung ausgelesen werden. Die Drehzahlerfassung erfolgt durch einen Inkrementalgeber mit 1024 Pulsen, der im Maschinensatz verbaut ist.

Tabelle 8.1.: Herstellerangaben zur Asynchronmaschine

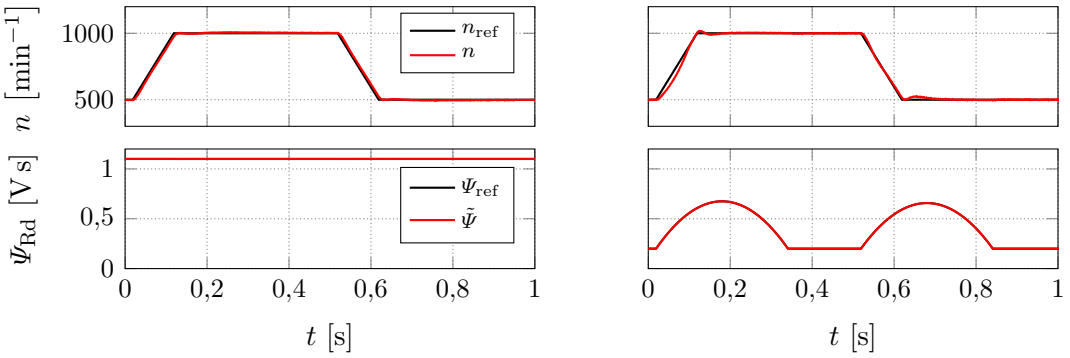
P_N in W	M_N in N m	n_N in min^{-1}	p	L_m in mH	L_S in mH	L_R in mH	R_S in Ω	R_R in Ω	J in $\mathrm{kg\,m^2}$
4000	26	1440	2	181,8	194,4	187,1	1,3	0,93	0,036

8.2. Reglervalidierung

Die Implementierung der Regelung erfolgte in Simulink, eine Simulationssoftware integriert in MATLAB . Der fertige Entwurf wird in C-Code kompiliert und von dSpace in Echtzeit ausgeführt. Es ist möglich, einen konstanten Rotorfluss und eine konstante Drehzahl vorzugeben. Die Vorgaben werden auch mit Trajektorien adressiert. Es ist daneben vorgesehen, auf eine zyklische Drehzahl umzuschalten. Der Verlauf der Funktion lässt sich durch verschiedene Parameter beeinflussen. Absichtlich wurde ein Profil mit sehr kurzen Überführungszeiten und hoher Drehzahldifferenz zur Überprüfung der Reglerfunktionalität gewählt. Hier zeigen sich am besten die Unterschiede zwischen den zwei beschriebenen Varianten aus 7.2 und 7.3. Die Drehzahltrajektorie und der Istwert sind für beide Reglerimplementierungen nachvollziehbar in Abbildung 8.1 illustriert. Zu jedem Reglertyp wurden Soll- und Istwert der Führungsregler (Drehzahl- und Flussregler) in zwei unterschiedlichen Fällen betrachtet. Auf der linken Seite in Abbildung 8.1a und 8.1b wurde ein Drehzahlzyklus bei konstantem Nennfluss vorgegeben. Rechts hingegen wurde das gleiche Drehzahlprofil bei verlustoptimaler Flusstrajektorie getestet. Der Vergleich von Soll- und Istwert zeigt bei dem konventionellen PI-Regler deutliche Abweichungen von der Drehzahltrajektorie. Speziell bei Vorgabe einer optimierten Flusstrajektorie treten größere Abweichungen und Einschwingzeiten auf, experimentell gezeigt auf der rechten Seite in Abbildung 8.1a. Ein wichtiger Grund dafür ist der Einfluss von Ψ_Rd auf die Regelstrecke des Drehzahlregelkreises. Die Verwendung eines Reglers, der sich die Flachheit des Systems zu Nutze macht, führt in Abbildung 8.1b zu deutlich besseren Ergebnissen im Folgeverhalten. Außerdem ist die Reglerverstärkung im flachheitsbasierten Regler abhängig von der Flussverkettung und kompensiert die erhöhte Streckenverstärkung bei niedrigem Fluss. Ergebnis sind sehr geringes Überschwingen und geringe Abweichung in der Rampenfunktion der Drehzahl. Der flachheitsbasierte Regler überzeugt als bessere Wahl für alle weiteren Experimente.



(a) Verwendung eines herkömmlichen PI-Reglers.



(b) Flachheitsbasierter PI-Regler.

Abbildung 8.1.: Gegenüberstellung des Regelverhaltens von konventionellem PI-Regler in (a) und flachem PI-Regler in (b). Die Führungsregler agieren links bei konstantem Nennfluss und rechts bei optimierter Flusstrajektorie.

8.3. Vergleich zwischen Betrieb mit Nennfluss und mit verlustoptimaler Trajektorie

Die Maschine fuhr zyklisch über einen längeren Zeitraum diverse Drehzahltrajektorien ab. Während eines Drehzahlregimes erfolgte die Untersuchung bei zwei verschiedenen Flusstrajektorien: Nennfluss und optimierte Flusstrajektorie. Es wurde keine zusätzliche Last generiert. Für die Berechnung der optimierten Flusstrajektorie wurde daher ein geringes Lastmoment angenommen, dass in etwa dem Reibmoment entsprechen soll.

In Abbildung 8.2 sind verschiedene Drehzahlvorgaben zu sehen, charakterisiert durch die Anstiegszeit bzw. Bremszeit Δt, die Periode eines Zyklus T und dem Drehzahlhub Δn. Die Untersuchung der drei freien Parameter ist für eine größere Studie interessant. Bei diesen Tests wurde generell der Drehzahlhub nicht geändert und auch die Periodendauer

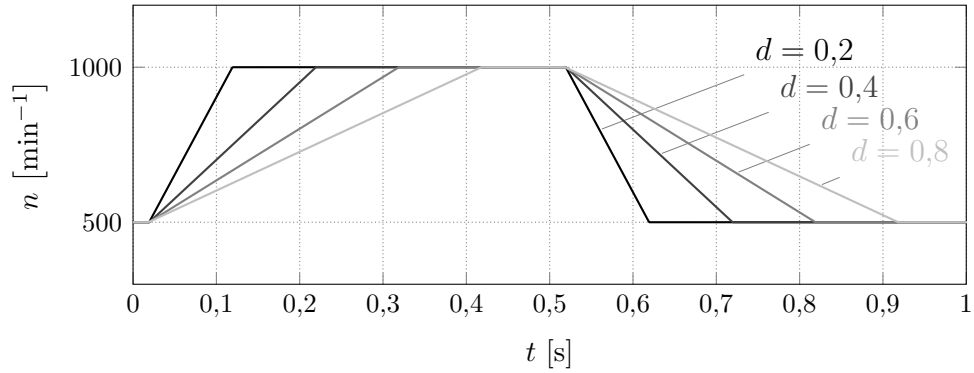


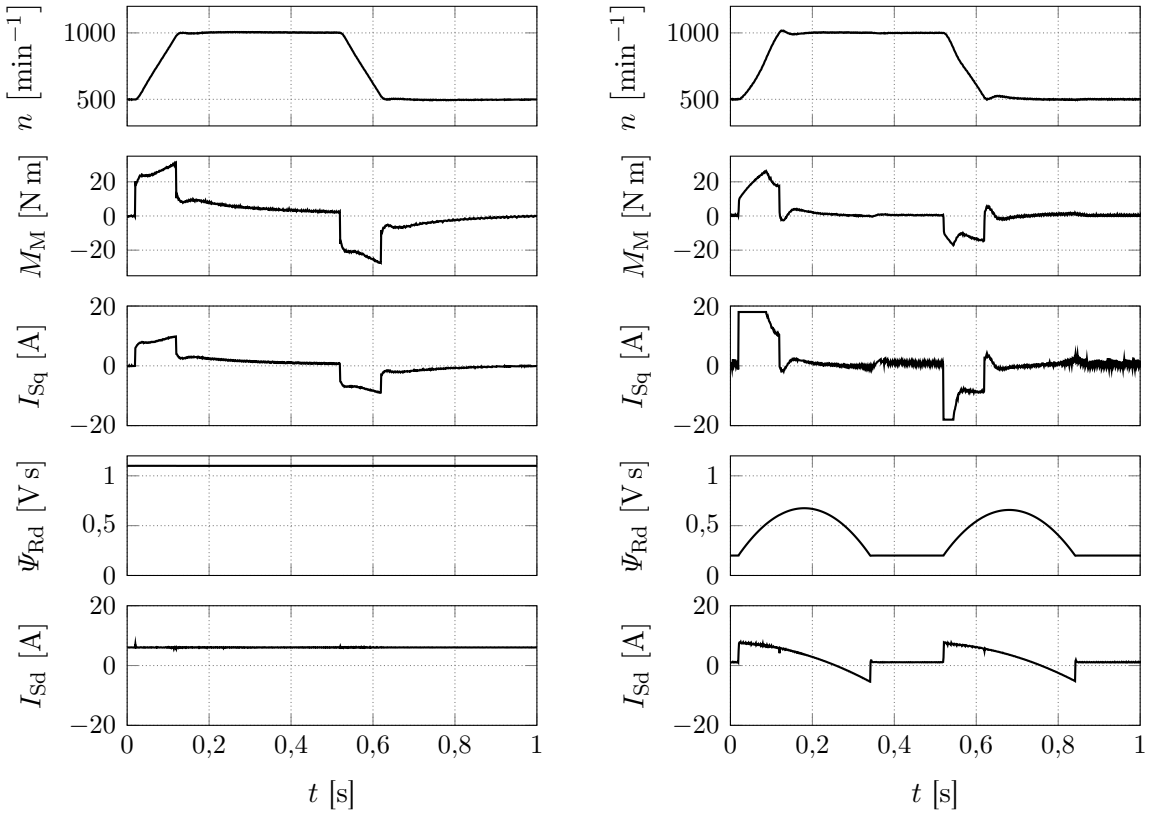
Abbildung 8.2.: Bei gleichem Drehzahlhub $\Delta n = 500\,\mathrm{min}^{-1}$ und einer Periodendauer $T = 1\,\mathrm{s}$ wird die Anstiegszeit Δt geändert. Es entstehen verschiedene Trajektorien klassifiziert mit dem Parameter $d = \frac{2\Delta t}{T}$.

bei $T = 1\,\mathrm{s}$ belassen. Der einheitenlose Parameter $d = \frac{2\Delta t}{T}$ wird eingeführt. Dieser adressiert indirekt die Änderung der Übergangszeit Δt im Bereich 0,1 s bis 0,45 s und gibt den Anteil der Transferzeit zur Gesamtdauer an. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 8.3 und 8.4 exemplarisch für $d = 0{,}2$ und $d = 0{,}6$ dargestellt. Fast alle Größen entstammen den Berechnungen des dSpace-Systems auf der Grundlage von Strom- und Drehzahlmessung. Nur die Drehmomentkurve wurde modellbasiert aus den Systemgrößen Ψ_{Rd} und I_{Sq} berechnet:

$$M_{\mathrm{M}} = \frac{3}{2}\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}} p \Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sq}}. \tag{8.1}$$

In zukünftigen Versuchen kann das Drehmoment auch gemessen werden.

In den Ergebnissen aus Abbildung 8.3 sind die dynamischen Anforderungen deutlich größer und die Maschine muss mehr Drehmoment erzeugen um der Drehzahltrajektorie zu folgen. Dabei wird etwa $M_{\mathrm{M}} \approx 0{,}75 M_{\mathrm{nenn}}$ benötigt. Man kann beobachten, dass während der steigenden Drehzahlrampe das generierte Drehmoment stetig zunimmt, zurückzuführen auf den I-Anteil im Regler, der die Stellgröße entsprechend erhöht bei wachsender Abweichung. Außerdem fällt auf, dass für die optimierte Flusstrajektorie ein größerer Strom I_{Sq} notwendig ist um das gleiche Drehmoment zu erzeugen. Daher wird im Vergleich zum Nennfluss die Strombegrenzung bereits erreicht und das Drehmoment kann so nur „langsam“ mit der Rotorflussverkettung anwachsen. Die Steigung des Drehzahlsollwerts kann nicht exakt eingehalten werden. Sobald der Fluss einen ausreichenden Betrag erreicht hat, wird genug Drehmoment zur Verfügung gestellt, um der linearen Drehzahländerung zu folgen. Größerer Drehzahlhub und/oder kürzere Transferzeit sind de facto nur mit größeren Regelabweichungen zu bewältigen. Entsprechend wurden geringere d nicht



(a) Flusstrajektorie: Nennfluss.

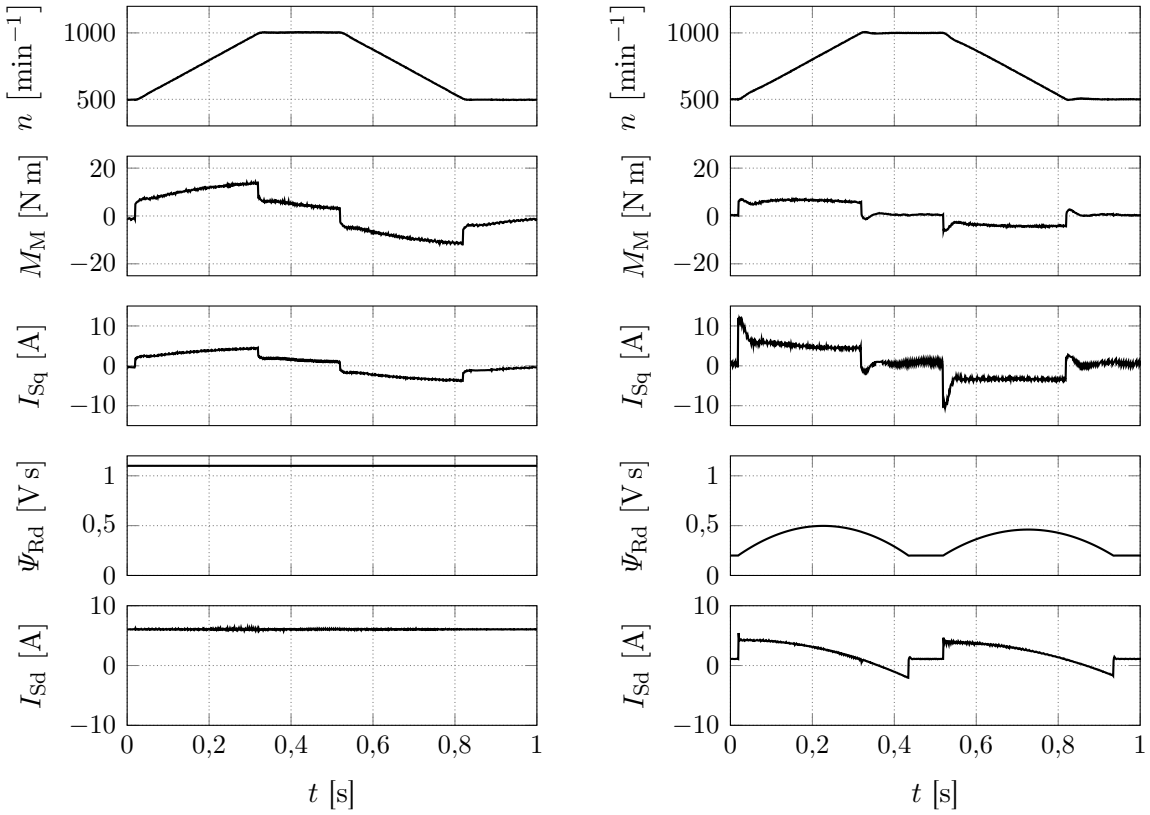
(b) Flusstrajektorie: Verlustoptimiert.

Abbildung 8.3.: Vergleich von Regelung mit Nennfluss (links) und mit vorgeschlagener Flussoptimierung (rechts) für hohe dynamische Anforderung bei $d = 0{,}2$. Alle Verläufe sind Systemausgaben, keine Sollwerte.

untersucht, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten. Die Ergebnisse für $d = 0{,}2$ sind bereits kritisch zu sehen.

Bei $d = 0{,}6$ ist das geforderte Drehmoment geringer und die Flusstrajektorie in Abbildung 8.4b besitzt einen geringen Maximalwert. Keine Stellgrößenbegrenzungen treten in Kraft, die Drehzahlübergänge sind ausgedehnter und die stationären Arbeitspunkte werden nur sehr kurz angefahren.

Die Beurteilung der Verluste diverser Zyklen erfolgte durch Vergleich der Eingangsleistung. Eine geringere Eingangsleistung heißt, dass weniger Verluste erzeugt wurden. Diese Methode ist zulässig, weil durch genaues Abfahren der Drehzahltrajektorien stets die gleiche mechanische Leistung abgegeben wird. Im Fall $d = 0{,}2$ trifft das nur noch annähernd zu, weil bereits kleine Abweichungen ersichtlich sind und das genaue Folgen der Drehzahlsollvorgabe nicht mehr möglich ist. Die Eingangsleistung des Asynchronmotors



(a) Flussvorgabe: Nennfluss.

(b) Flussvorgabe: Verlustoptimiert.

Abbildung 8.4.: Vergleich von Regelung mit Nennfluss und Regelung mit vorgeschlagener Flussoptimierung für geringe dynamische Anforderung bei $d = 0{,}6$.

wurde im Zwischenkreis berechnet. Dadurch sind die Verluste des Wechselrichters einbezogen, jedoch sehr klein. Die Eingangsleistung $P_{\mathrm{dc}} = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} U_{\mathrm{dc}} I_{\mathrm{dc}} dt$ ist der Mittelwert der Augenblicksleistung im Zwischenkreis. Spannung U_{dc} und Strom I_{dc} sind periodisch veränderliche Werte. Abbildung 8.5 zeigt die Eingangsleistung in Abhängigkeit des Parameters d für Betrieb mit Nennfluss und mit optimierter Trajektorie. Für die Drehzahltrajektorien mit geringen Momentanforderungen (bei längeren Übergangszeiten) ist die benötigte Leistung P_{dc} kleiner für den Betrieb mit Flussoptimierung. Es entstehen weniger Verluste. Zum einen treten dort geringere Flussänderungen auf und der Strom I_{Sd} bleibt niedrig und zum anderen wird in den lastlosen stationären Arbeitspunkten des Drehzahlprofils das Potential der Flussoptimerung maximal ausgenutzt. Dennoch werden mehr Verluste bei Flussoptimierung erzeugt, wenn die Maschine die meiste Zeit im stationären Regime verbringt bei $d = 0{,}2$. Das hohe Drehmoment in den kurzen Übergangszeiten steht anfangs einem sehr geringen Rotorfluss bei Flussoptimerung gegenüber. Darum müssen sehr hohe Ströme das Drehmoment erzeugen. Mit konstantem Nennfluss wird ein geringerer I_{Sq} benötigt. Die entstehenden Verluste sind deutlich geringer und die Ersparnis überwiegt

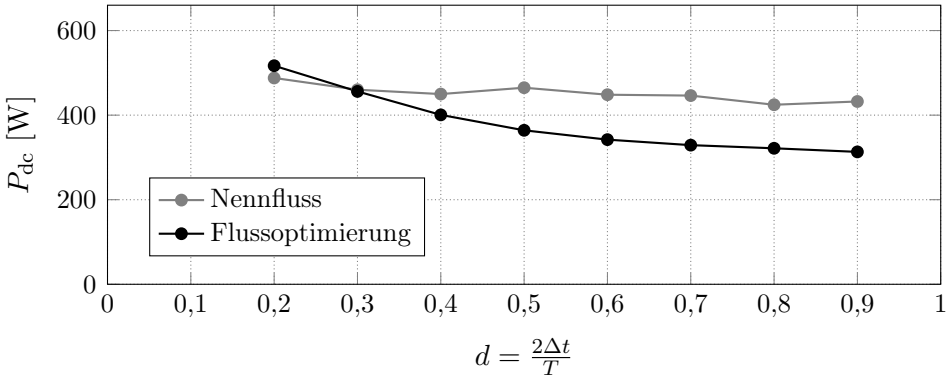


Abbildung 8.5.: Vergleich der benötigten Zwischenkreisleistung bei Betrieb mit Nennfluss und Betrieb mit Flussoptimierung in Abhängigkeit von d.

demnach das Defizit während der stationären Phasen. In Summe scheint in diesem Fall der Betrieb mit Nennfluss der energetisch Günstigere. Eine exakte Aussage ist aufgrund der vielen Unsicherheiten schwierig: Die gewählten Modellparameter weichen eventuell stark von der Realität ab und die Approximation des Verlustmodells führt zu großen Abweichungen bei sehr geringem Rotorfluss.

Die Flussoptimierung funktioniert und spart in den meisten getesteten Drehzahlprofilen Energie ein, aber ist nach getroffenen Annahmen von den stationär optimierten Randwerten des Rotorflusses abhängig. Wenn hohe Beschleunigungsmomente häufig auf Phasen mit geringer stationärer Auslastung folgen, dann ist nach diesem Ersteindruck die Überführung mit Nennfluss sparsamer. Eine Maßnahme um diese Schwäche der Flussoptimierung zu umgehen, wäre eine vorausschauende langsame Anhebung des Rotorflusses auf einen präventiv optimalen Wert $\Psi_{\mathrm{Rd,a}}$ vor der nächsten Überführung. Dieser Randwert lässt sich natürlich nur unter Kenntnis des folgenden Drehzahlüberganges ermitteln.

Ein anderer Weg führt zu einer anderen Vorgabe der Überführung. Die gewählte Drehzahlrampe fordert stets Drehmomentsprünge. Wenn die Wahl des Drehzahlübergangs nicht durch die Anwendung eingeschränkt ist, wäre der Test von linearen Drehmomentfunktionen, sprich „s-förmigen“ Drehzahlüberführungen auch denkbar. Dieser Ansatz wurde am Anfang der Arbeit verworfen, weil konstante Drehmomentabschnitte die Differentialgleichung (5.21) vereinfachten. Dank des approximierten Ansatzes wird (5.21) nicht mehr benötigt und es können auch zeitvariante Drehmomentfunktionen betrachtet werden.

9. Zusammenfassung

Die Verlustoptimierung einer Asynchronmaschine in transienten Arbeitsregimes hat bisher wenig publizistische Aufmerksamkeit bekommen. Die veröffentlichten Ansätze haben gemeinsam, dass die Rotorflussverkettung entsprechend der Drehzahl- bzw. Drehmomentänderungen angepasst wird. Diese Arbeit zeigt einen neuen modellbasierten alternativen Ansatz.

Die Grundlagen der Arbeit umfassen die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung, eine nachvollziehbare Modellbildung der Asynchronmaschine mit Käfigläufer im dq-Koordinatensystem und den Nachweis, dass das Modell der Asynchronmaschine ein flaches System ist.

Im Kapitel 5 wurden zunächst Kupfer- und Eisenverluste als regelungsrelevant identifiziert und nach Diskussion vereinfacht. Die Minimierung der Energieverluste im transienten Betrieb führt zu einer zeitvarianten, nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Nur numerische Algorithmen konnten diese nach der Flusstrajektorie mit maximaler Effizienz auflösen. Es bot sich eine ausführliche Diskussion Jean-François Stumpers publizierten Lösungsweges [SDK13] an. Die Analyse offenbarte Schwächen in der Methodik und zeigte, dass der numerische Algorithmus nicht in jedem Fall konvergiert. Trotzdem lagen die Ergebnisse nahe am numerischen Optimum. Nur beim fehlerhaften Verhalten des Algorithmus konnte bedeutendes Restpotential in der Effizienz festgestellt werden.

Es wurde ein alternativer robusterer Weg vorgestellt um eine optimale Flusstrajektorie zur linearen Drehzahländerung zu entwerfen. Der Rotorfluss wird von einem linken stationär-optimierten Wert durch eine quadratische Funktion in einem vergrößerten Zeitfenster zu einem rechten stationär-optimierten Wert überführt. Basierend auf einer Modifikation des ursprünglichen Verlustmodells wurden die Koeffizienten der quadratischen Überführungsfunktion des Rotorflusses verlustoptimal berechnet. Dieser Algorithmus ist flexibel, da er sogar Drehmomentsprünge während der Überführung einbezieht. Die Funktion konnte

schließlich mit einer abgeänderten rotorflussorientierten Regelung nachgewiesen werden. Eine flachheitsbasierte Vorsteuerung verbesserte maßgeblich den ursprünglichen Regelungsentwurf.

Zuletzt wurden am Teststand der Betrieb mit Nennfluss und mit optimiertem Flussverlauf für verschiedene transiente Arbeitsregimes verglichen. In einer kleinen Studie konnte gezeigt werden, dass die Verluste meistens geringer sind, wenn eine Optimierung vorliegt. Die Ausnahme besteht, wenn das Arbeitsregime nach einer Phase mit sehr geringer Auslastung plötzlich ein hohes Beschleunigungsmoment verlangt. Tritt dieser Fall zyklisch in geringen zeitlichen Abständen auf, so ist der Betrieb mit Nennfluss effizienter.

In der Zukunft können auf Basis der realisierten Regelung größere Studien am Versuchsstand durchgeführt werden, die speziell die Frage klären, welcher Weg der Flussanpassung bei welchen Anforderungen der effizienteste ist. Außerdem kann der vorgestellte Algorithmus weiterhin verbessert werden, in dem vor hohen dynamischen Ansprüchen eine langsame Anhebung des Flusses erfolgt oder für sehr dynamische Vorgänge der stationäre Minimalfluss angehoben wird. Zudem stehen noch Studien bei verschiedenen Belastungen der Maschine aus.

A. Betrachtung des alternativen flachen Ausgangs $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$

Die Betrachtung der flacher Ausgänge $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$ und $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ führt zwangsläufig zu der Frage, welcher der geeignetere ist. Bei der Flachheitsanalyse des Systems durch beide flache Ausgänge konnte kein entscheidendes Kriterium gefunden werden. Die Darstellung der Verluste und deren Minimierung wird daher als weiterer Beurteilungspunkt untersucht. Es folgt eine Herleitung des Verlustmodells und der Extremwertbedingungen zum verlustoptimalen Betrieb in Abhängigkeit des Ausgangs $z = (z_1, z_2) = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$.

A.1. Verlustmodell parametriert durch $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$

Beruhend auf dem ausführlichen Verlustmodell

$$P_v = \frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right)\left(I_{\mathrm{Sd}}^2 + I_{\mathrm{Sq}}^2\right) - 3R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}I_{\mathrm{Sd}} + \frac{3}{2}\frac{R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 + \frac{3}{2}\omega_\alpha^2\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{fe}}L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2. \quad \text{(A.1)}$$

welches bereits aus dem Kapitel 5 bekannt ist, werden schrittweise alle Systemgrößen durch Funktionen des flachen Ausgangs ersetzt. Durch eine Aufteilung des langen Verlustterms in kleinere Terme lässt sich die aufwendige Rechnung stückweise präsentieren

A.1.1. Aufteilen des Modells in einzelne Terme

In (A.1) bestimmt

$$P_{\mathrm{fe}} = \frac{3}{2}\omega_\alpha^2\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{fe}}L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 \quad \text{(A.2)}$$

die Höhe der Eisenverluste und der restliche Term definiert die Kupferverluste. Diese werden zur Übersichtlichkeit aufgeteilt bevor der flache Ausgang eingesetzt wird.

$$P_{\mathrm{cu}} = \underbrace{\frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right) I_{\mathrm{Sd}}^2}_{P_1} + \underbrace{\frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right) I_{\mathrm{Sq}}^2}_{P_2} \underbrace{-3R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}} I_{\mathrm{Sd}}}_{P_3} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2}_{P_4} \tag{A.3}$$

Die Systemgrößen des flachen Ausgangs werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$I_{\mathrm{Sq}} = z_1 \tag{A.4}$$

$$\omega_{\mathrm{m}} = z_2 \tag{A.5}$$

$$\Psi_{\mathrm{Rd}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{pL_{\mathrm{M}}}\frac{1}{z_1}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \tag{A.6}$$

$$\dot{\Psi}_{\mathrm{Rd}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{pL_{\mathrm{M}}}\left(-\frac{\dot{z}_1}{z_1^2}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \frac{J\ddot{z}_2}{z_1}\right) \tag{A.7}$$

$$I_{\mathrm{Sd}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{pL_{\mathrm{M}}^2 z_1}\left(\left(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1}\right)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right) \tag{A.8}$$

Die Gleichungen werden nun in die einzelnen Teile der Funktion P_{cu} eingesetzt und weitestgehend ausmultipliziert.

A.1.2. Berechnung der spezifizierten Terme

$$\begin{aligned} P_1 = {} & \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{S}}L_{\mathrm{R}}^2}{p^2L_{\mathrm{M}}^4 z_1^2}\left(\left(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1}\right)^2\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 + 2\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\left(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1}\right)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \left(\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2\right) \\ & + \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2L_{\mathrm{M}}^2 z_1^2}\left(\left(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1}\right)^2\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 + 2\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\left(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1}\right)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \left(\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2\right) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Es folgen

$$P_2 = \frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right) z_1^2, \tag{A.10}$$

$$P_3 = -\frac{4}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2 L_{\mathrm{M}}^2 z_1^2}(1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{L_{\mathrm{R}} J}{p^2 L_{\mathrm{M}}^2}\frac{\ddot{z}_2}{z_1^2}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right), \tag{A.11}$$

$$P_4 = \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2 L_{\mathrm{M}}^2}\frac{1}{z_1^2}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2. \tag{A.12}$$

Der Term P_2 lässt sich nicht weiter vereinfachen. Eventuell werden weitere Vereinfachungen ersichtlich, wenn man P_1 zu P_3 und P_4 addiert:

$$\begin{aligned} P_1 + P_3 + P_4 = &\frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{S}} L_{\mathrm{R}}^2}{p^2 L_{\mathrm{M}}^4 z_1^2}\left((1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \frac{L_{\mathrm{R}} J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2 \\ &+ \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2 L_{\mathrm{M}}^2 z_1^2}\left((\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) - \frac{L_{\mathrm{R}} J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Nachdem maximal vereinfacht wurde, ergeben sich die Kupferverluste aus der Summe der Teilverluste

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{cu}} &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ &= \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{S}} L_{\mathrm{R}}^2}{p^2 L_{\mathrm{M}}^4 z_1^2}\left((1 - \frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + \frac{L_{\mathrm{R}} J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2 L_{\mathrm{M}}^2 z_1^2}\left((\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) - \frac{L_{\mathrm{R}} J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right) z_1^2. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Die Eisenverluste

$$P_{\mathrm{fe}} = \frac{3}{2}\omega_\alpha^2 \frac{L_{\mathrm{M}}^2}{R_{\mathrm{fe}} L_{\mathrm{R}}^2}\Psi_{\mathrm{Rd}}^2 \tag{A.15}$$

sind nach dem Einsetzen von

$$\Psi_{\mathrm{Rd}} = \frac{2}{3}\frac{L_{\mathrm{R}}}{p L_{\mathrm{M}}}\frac{1}{z_1}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \tag{A.16}$$

und

$$\omega_\alpha \approx p z_2 \tag{A.17}$$

parametrierbar durch den flachen Ausgang:

$$P_{\mathrm{fe}} = \frac{3}{2}\frac{1}{R_{\mathrm{fe}}}\frac{z_2^2}{z_1^2}\left(\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2\right). \tag{A.18}$$

A.1.3. Finale Darstellung des Modells $P_{\mathrm{v}} = f(I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$

Die Summe aller Verluste in Abhängigkeit von $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$ beträgt

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{v}} = & \underbrace{\frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{S}}L_{\mathrm{R}}^2}{p^2L_{\mathrm{M}}^4 z_1^2}\left((1-\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2+M_{\mathrm{L}}\right)+\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2}_{P_{\mathrm{cu\,1}}} + \\ & \underbrace{\frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2L_{\mathrm{M}}^2 z_1^2}\left((\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2+M_{\mathrm{L}}\right)-\frac{L_{\mathrm{R}}J}{R_{\mathrm{R}}}\ddot{z}_2\right)^2}_{P_{\mathrm{cu\,2}}} + \underbrace{\frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}}+R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right)z_1^2}_{P_{\mathrm{cu\,3}}} + \\ & \underbrace{\frac{3}{2}\frac{1}{R_{\mathrm{fe}}}\frac{z_2^2}{z_1^2}\left(\left(J\dot{z}_2+M_{\mathrm{L}}\right)^2\right.}_{P_{\mathrm{fe}}} \end{aligned} \tag{A.19}$$

Im Vergleich zur mathematischen Beschreibung des Verlustmodells durch den favorisierten Ausgang (5.13) treten hier Ableitungen höherer Ordnung auf. Dennoch ist die Gleichung ebenso lösbar. Interessant ist es, die Euler-Lagrange-Gleichung für diesen flachen Ausgang zu berechnen und den Lösungsaufwand mit der Bedingung (5.21) des anderen Ausgangs zu vergleichen.

A.2. Herleitung des Minimums der Verluste

Die Grundlagen und Voraussetzungen für die Suche nach dem kleinsten Wert der Funktion P_{v} aus Gleichung (A.19) sind in Abschnitt 5.5 angeführt. Die dort beschriebenen Rahmenbedingungen gelten uneingeschränkt für den flachen Ausgang $z = (I_{\mathrm{Sq}}, \omega_{\mathrm{m}})$.

A.2.1. Im stationären Betrieb

Die Methodik zur Bestimmung des Minimums orientiert sich an dem Vorgehen für $y = (\Psi_{\mathrm{Rd}}, \omega_{\mathrm{m}})$: Die Ableitung $\frac{dP_v}{dI_{\mathrm{Sq}}}$ bilden, null setzen und nach I_{Sq} bzw. z_1 lösen. Unter der Voraussetzung $\dot{z}_1, \dot{z}_2 = 0$ ist

$$z_1 = \sqrt{\frac{2}{3p}M_{\mathrm{L}}\sqrt{\frac{R_{\mathrm{S}}R_{\mathrm{fe}}L_{\mathrm{R}}^4 + L_{\mathrm{M}}^4L_{\mathrm{R}}^2p^2z_2^2}{R_{\mathrm{S}}R_{\mathrm{fe}}L_{\mathrm{M}}^4L_{\mathrm{R}}^2 + R_{\mathrm{R}}R_{\mathrm{fe}}L_{\mathrm{M}}^6}}}. \tag{A.20}$$

Der verlustoptimale Strom I_{Sq} ist vordergründig vom Drehmoment abhängig und weniger empfindlich gegenüber der mechanischen Kreisfrequenz ω_{m}.

A.2.2. Im dynamischen Betrieb

Die Bedingung für verlustoptimalen Betrieb liefert die Euler-Lagrange-Gleichung. Das Vorgehen ist simultan zu Abschnitt 5.5.2. Die Bewertung des entstehenden mathematischen Problems ist ein wichtiger Punkt für die Wahl des flachen Ausgangs. Der Zusammenhang wird in Teilen analytisch berechnet und vorgestellt:

$$A = \frac{\partial P_v}{\partial z_1}, \quad B = \frac{\partial P_v}{\partial \dot{z}_1}, \quad C = \frac{dB}{dt}. \tag{A.21}$$

Außerdem werden die Faktoren

$$a = \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{S}} L_{\mathrm{R}}^2}{p^2 L_{\mathrm{M}}^4}, \tag{A.22a}$$

$$b = \frac{2}{3}\frac{R_{\mathrm{R}}}{p^2 L_{\mathrm{M}}^4}, \tag{A.22b}$$

$$c = \frac{3}{2}\left(R_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{R}}\frac{L_{\mathrm{M}}^2}{L_{\mathrm{R}}^2}\right), \tag{A.22c}$$

$$d = \frac{L_{\mathrm{R}} J}{R_{\mathrm{R}}}, \tag{A.22d}$$

$$e = \frac{L_{\mathrm{M}}^2 R_{\mathrm{R}}}{L_{\mathrm{R}}^2} \tag{A.22e}$$

eingeführt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A = &-\frac{2a}{z_1^3}\left((1-\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + d\ddot{z}_2\right)^2 \\ &+ \frac{2a}{z_1^2}\left((1-\frac{\dot{z}_1}{z_1})\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) + d\ddot{z}_2\right)\cdot\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)\frac{\dot{z}_1}{z_1^2} \\ &- \frac{2b}{z_1^3}\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) - d\ddot{z}_2\right)^2 - \frac{2b}{z_1^2}\left(\frac{\dot{z}_1}{z_1}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) - d\ddot{z}_2\right)\frac{\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)\dot{z}_1}{z_1^2} \\ &+ 2cz_1 + \frac{3}{2R_{\mathrm{fe}}}\left(2e^2 z_1 - 2\frac{4}{9}\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2\frac{z_2^2}{z_1^3}\right). \end{aligned} \tag{A.23}$$

Der zweite Term ist

$$\begin{aligned} B &= 2a\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\dot{z}_1}{z_1^4} - 2a\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{1}{z_1^3} \\ &\quad - 2ad\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{\ddot{z}_2}{z_1^3} + 2b\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\dot{z}_1}{z_1^4} - 2bd\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{1}{z_1^3} \\ &= 2(a+b)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\dot{z}_1}{z_1^4} - 2a\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{1}{z_1^3} - 2d\left(a\ddot{z}_2 + b\right)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{1}{z_1^3}. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Die zeitliche Ableitung von B entspricht

$$\begin{aligned} C &= 4(a+b)J\ddot{z}_2\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{\dot{z}_1}{z_1^4} + 2(a+b)\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\ddot{z}_1 z_1 - 4\dot{z}_1^2}{z_1^5} \\ &\quad - 4aJ\ddot{z}_2\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{1}{z_1^3} + 6a\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\dot{z}_1}{z_1^4} \\ &\quad - 2ad\dddot{z}_2\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right) \frac{1}{z_1^3} - 2d\left(a\ddot{z}_2 + b\right)\left(J\frac{\ddot{z}_2}{z_1^3} - 3\left(J\dot{z}_2 + M_{\mathrm{L}}\right)\frac{\dot{z}_1}{z_1^4}\right). \end{aligned} \tag{A.25}$$

Die Eulergleichung resultiert aus $A - C = 0$ zu

$$\begin{aligned} 0 &= 4\left(a+b\right)\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\dot{z}_1^2}{z_1^5} + 6bd\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)\left(\ddot{z}_2 - 1\right)\frac{\dot{z}_1}{z_1^4} - \\ &\quad 4\left(a+b\right)\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)\frac{\dot{z}_1\ddot{z}_2}{z_1^4} - 2\left(a+b\right)\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{\ddot{z}_1}{z_1^4} - \\ &\quad 2a\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{1}{z_1^3} - \underline{\frac{4}{3R_{\mathrm{fe}}}\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \frac{z_2^2}{z_1^3}} + 2d(aJ - ad - bd)\frac{\ddot{z}_2^2}{z_1^3} + \\ &\quad 2\left(bdJ + 2aJ\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right) - 2ad\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)\right)\frac{\ddot{z}_2}{z_1^3} + 2ad\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)\frac{\dddot{z}_2}{z_1^3} + \\ &\quad 2cz_1 + \underline{3\frac{e^2}{R_{\mathrm{fe}}}z_1}. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Die Gleichung besteht aus vielen Termen, die nicht weiter zusammengefasst werden können. Es handelt sich um eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Werden ausschließlich Kupferverluste betrachtet, entfallen die unterstrichenen Komponenten. Die Gleichung vereinfacht sich deutlich im Fall einer linearen Drehzahländerung. Dann gilt $\ddot{z}_2, \dddot{z}_2 = 0$. Es entsteht

$$\begin{aligned} 0 &= 4\left(a+b\right)\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \dot{z}_1^2 \\ &\quad + 6bd\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)\left(\ddot{z}_2 - 1\right)\dot{z}_1 z_1 - 2\left(a+b\right)\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 \ddot{z}_1 z_1 \\ &\quad - 2a\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 z_1^2 - \underline{\frac{4}{3R_{\mathrm{fe}}}\left(J\dot{\omega}_{\mathrm{m}} + M_{\mathrm{L}}\right)^2 z_2^2 z_1^2} + \left(2c + \underline{3\frac{e^2}{R_{\mathrm{fe}}}}\right) z_1^6. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Die Extremwertbedingung (A.27) erweist sich als komplexere nichtlineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Im Vergleich zur Euler-Lagrange-Gleichung des anderen Ausgangs (5.21) erscheint die Lösung dieses Problems sogar schwieriger. Kein analytischer Ansatz des Autors führt zur Lösung. Die Gleichung muss daher numerisch gelöst werden. Der Aufwand entspricht mindestens der Lösung von (5.21). Die weitere Untersuchung dieses Ausgang entfällt.

B. Skripte

In diesem Teil sind relevanten Skripte der Diplomarbeit aufgeführt, die zum Lösen der Aufgabenstellung nötig waren. Es wurde die Programmiersprache MATLAB in Zusammenhang mit der Erweiterung SIMULINK für die Modellierung des Systems und für das Lösen von Differentialgleichungen verwendet. Auf der mitgelieferten CD befinden sich mehr Skripte und das fertige SIMULINK-Modell der Regelung.

B.1. Skript zum Lösen der Gleichung (5.21)

```
function []= solvebvp()
% Init parameters
Rfe= 1400; %Ohm
Rr = 2.27;
Rs = 2.66;
Lr = 255*10^-3; %H Henry in ...
Ls = 255*10^-3;
M  = 245*10^-3;
Ppz= 1;       %Polpaarzahl
J  = 2.284;   %kgms
M_last = 30; %konstantes Lastmoment in Nm

% Init conditions omega_mech
n0 = 500; %Startdrehzahl in 1/min
n1 = 2000; %Enddrehzahl in 1/min
omega_mecha = n0*2*pi/60;
omega_mechb = n1*2*pi/60;

% Init solver
t0 = 0;
t1 = 1;
solinit = bvpinit(linspace(t0,t1,100), [1,0]);
sol = bvp4c(@bvpSecOrderODE,@bc,solinit);
t = linspace(t0,t1);
sol_vec = deval(sol,t);
plot(t,sol_vec(1,:))
xlabel('time [s]');
ylabel('Rotorfluss \Phi_d [Wb]');
```

```
function f = bvpSecOrderODE(t,y)
%%PREPARES THE SECOND ORDER DIFF FUNCTION for solver bvp4c
%This function must have the shape of the right side of a first order eq system
%dy/dt = z
%dz/dt = f(z,y,t)

%Init function omega_mech
omega_mech = (omega_mechb-omega_mecha)/(t1-t0)*t;
omegadot_mech = (omega_mechb-omega_mecha)/(t1-t0);

%Calculate coefficients
a   = 4/(3*Ppz^2)*(Rs*Lr^2/M^2 + Rr + M^2*Rr^2/(Rfe*Lr^2) );
b_1 = 3*(Rs/M^2 + M^2/(Rfe*Lr^2)*Ppz^2*omega_mech.^2);
b_2 = 3*(1/Rr + Lr^2/M^2*Rs/Rr^2);

%Assemble function
Fluss = y(1);
Flussdot = y(2);
f = [ Flussdot ; - (a/b_2)*1/(Fluss^3).*(J*omegadot_mech+M_last)^2 + (b_1/b_2)*Fluss ];
end

function res = bc(ya,yb)
%% PREPARES THE BOUNDARY CONDITIONS FOR SOLVER bvp4c
%Die Bedinungen muessen als Residuen uebergeben werden, dass heisst
%die linke Seite der Gleichungen
%bed1(y) = 0 , Beispiel: y(t=0)-3 = 0
%bed2(y) = 0


Fluss_a = sqrt(2/3*M_last/Ppz*sqrt( (Lr^4*Rs*Rfe + Lr^2*M^2*Rfe*Rr + M^4*Rr^2)/(Lr^2*Rs*
    Rfe + M^4*Ppz^2*omega_mecha^2) ))
Fluss_b = sqrt(2/3*M_last/Ppz*sqrt( (Lr^4*Rs*Rfe + Lr^2*M^2*Rfe*Rr + M^4*Rr^2)/(Lr^2*Rs*
    Rfe + M^4*Ppz^2*omega_mechb^2) ))

res = [ ya(1)-Fluss_a yb(1)-Fluss_b ];
end
end
```

B.2. Koeffizientenberechnung der quadratischen Flusstrajektorie

```
function [koeff_rise,koeff_fall, psi_low,psi_top,tpoints_vec] = calcfluxkoeff(nlow,ntop,
    fdt,T,Ts,samples_delay,systempars,losskoeffs,approxkoeffs)
% --- Eingaenge ---
%   T     --> Periodendauer
%   fdt   --> Faktor Uebergangsdauer
%   nlow  --> Startdrehzahl
%   ntop  --> Spitzendrehzahl
% --- Ausgaenge ---
```

```
%   koeff_rise --> Flusskoeffizienten fuer steigende Drehzahl
%   koeff_fall --> Flusskoeffizienten fuer sinkende Drehzahl
%   psi_low    --> stat. Startfluss vor Drehzahlanstieg
%   psi_top    --> stat. Endfluss nach Drehzahlanstieg
%   tpoints_vec--> Vektor mit den wichtigen Zeitpkten der Trajektorie
% --- Init Parameters und benoetige Koeffizienten
wn = systempars(1);mn = systempars (2);f_nenn = systempars(3);mlast = systempars(4);
J = systempars(5);
a1 = losskoeffs(1); a2 = losskoeffs(2); a3 = losskoeffs(3); a4 = losskoeffs(4);
d1 = losskoeffs(5); d2 = losskoeffs(6); d3 = losskoeffs(7); d4 = losskoeffs(8);
k0 = approxkoeffs(1); k1 = approxkoeffs(2); k2 = approxkoeffs(3);
% --- Berechnung ideale Samplezeiten
samples_T = 2*floor(T/2/Ts);        %ganzzahlige Tastschritte
samples_dt= floor(T*fdt/Ts);        %Tastschritte der Uebergangsdauer
dt= samples_dt*Ts;                  %Korrektur als Vielfaches der Abtastzeit
samples_Ttop = samples_T/2-samples_dt;
samples_delayfall = samples_delay+ samples_T/2;
samples_Tend = samples_Ttop -samples_delay;    %benoetigt fuer max Laenge Tpsi
% --- Berechnung Blockparameter Variante 2 und 3
ta_rise = samples_delay*Ts;
tb_rise = ta_rise+dt;
ta_fall = samples_delayfall*Ts;
tb_fall = ta_fall+dt;
% --- Init Zeitpkte Flusstrajektorie
Tmin=4*(J*wn)/(2.5*mn);                                % min. Zeitfenster fuer die dyn
    flusskurve
Tpsi = dt + Tmin*exp(-1/(3*Tmin)*dt);                  % Berechnung erw. Zeitfenster in
    Abh. dt
Tpsi = floor(Tpsi/Ts)*Ts;                              % Tpsi als vielfaches von tstep
    ausgeben
if Tpsi>=(dt+samples_Tend*Ts)                          % Tpsi innerhalb der Periodendauer
    begrenzen
Tpsi = dt+(samples_Tend-1)*Ts;
end
% --- Output Zeitpkte
tpoints_vec = [ta_rise;ta_rise+Tpsi;ta_fall;ta_fall+Tpsi]; %Output Vektor mit wichtigen
    Zeitpkten
% --- Init Berechnung
A1=a1;A2=a2;A3=a3;A4=a4;
K2 =k2;K1=k1;K0=k0;
% --- Init Drehzahlanstieg
wtop=2*pi*ntop/60;
wlow=2*pi*nlow/60;
JM1 = J*(wtop-wlow)/dt + mlast;     %konstanter Wert, sonst Fehler
JM2 = mlast;
ta = ta_rise;                           %Zeitpkte Drehzahlanstieg
tab= tb_rise;
tb = ta_rise+Tpsi;
psia = sqrt(d1*mlast*sqrt( d2/(d3 + d4*wlow^2) ));      %opt. Fluss links
psib = sqrt(d1*mlast*sqrt( d2/(d3 + d4*wtop^2) ));      %opt. Fluss rechts
if (psia<0.2), psia=0.2;elseif(psia>f_nenn), psia=f_nenn; end
if (psib<0.2), psib=0.2;elseif(psib>f_nenn), psib=f_nenn; end
psi_low=psia; %output
psi_top=psib; %output
% --- Berechnung der Parabelkoeffizienten
```

```
p0_rise = ((20*A3*psib*ta - 20*A3*psia*tb + ... ... %hier lange Formel,symbolisch
    berechnet
        ... A4*K2*JM2^2*tb^5 + A1*tb^5 + 10*A3*tb^3)/(15*ta^2*tb^2));
p1_rise = ta/tb*(psib - p0_rise + tb^2/ta^2*(p0_rise - psia) )/(ta-tb);
p2_rise = (ta*(p0_rise - psib) - tb*(p0_rise - psia))/(ta*tb*(ta - tb));
koeff_rise = [ p0_rise , p1_rise, p2_rise];
% --- Init Drehzahlabfall
JM1 = -J*(wtop-wlow)/dt + mlast;
JM2 = mlast;
ta = ta_fall;                %Zeitpkte Drehzahlanstieg
tab= tb_fall;
tb = ta_fall+Tpsi;
psia = sqrt(d1*mlast*sqrt( d2/(d3 + d4*wtop^2) ));      %opt. Fluss links
psib = sqrt(d1*mlast*sqrt( d2/(d3 + d4*wlow^2) ));      %opt. Fluss rechts
if (psia<0.2), psia=0.2;elseif(psia>f_nenn), psia=f_nenn; end
if (psib<0.2), psib=0.2;elseif(psib>f_nenn), psib=f_nenn; end
% --- Koeffizienten Trajektorie Drehzahlabfall
p0_fall = ((20*A3*psib*ta - 20*A3*psia*tb - ... ... %hier lange Formel,symbolisch
    berechnet
        ...       A4*K2*JM2^2*tb^5 + A1*tb^5 + 10*A3*tb^3)/(15*ta^2*tb^2));
p1_fall = ta/tb*(psib - p0_fall + tb^2/ta^2*(p0_fall - psia) )/(ta-tb);
p2_fall = (ta*(p0_fall - psib) - tb*(p0_fall - psia))/(ta*tb*(ta - tb));
koeff_fall = [p0_fall , p1_fall, p2_fall];
end
```

Literaturverzeichnis

[ABPT01] Abrahamsen, F. ; Blaabjerg, F. ; Pedersen, J.K. ; Thoegersen, P.B.: Efficiency-optimized control of medium-size induction motor drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 37 (2001), Nr. 6, S. 1761–1767

[Abr00] Abrahamsen, Flemming: *Energy optimal control of induction motor drives.* Aalborg, Institute of Energy Technology, Aalborg University, Diss., 2000

[Cla50] Clarke, Edith: *Circuit analysis of A - C power systems.* 4. Aufl. New York (u.a.) : Wiley, 1950

[JKK75] Jordan, Heinz ; Klíma, Vilém ; Kovács, Károly P.: *Asynchronmaschinen: Funktion, Theorie, Technisches.* Vieweg, 1975. – ISBN 978–3–528–04600–2

[KG83] Kusko, A. ; Galler, D.: Control Means for Minimization of Losses in AC and DC Motor Drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 19 (1983), Nr. 4, S. 561–570

[Küh07] Kühner, Manuel: *Einführung in die Raumzeigertheorie am Anwendungsbeispiel der Modellbildung der Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer.* Version: Oktober 2007. `http://pub.uni-bielefeld.de/download/2304889/2304895`, Abruf: 2014-11-27. – Semesterarbeit

[KNL85] Kirschen, D.S. ; Novotny, D.W. ; Lipo, T.A.: On-Line Efficiency Optimization of a Variable Frequency Induction Motor Drive. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 21 (1985), Nr. 3, S. 610–616

[Lan57] Lanczos, Cornelius: *The Variational Principles of Mechanics.* Reprint. Toronto : Toronto Press, 1957

[Leo00] Leonhard, Werner: *Regelung elektrischer Antriebe.* 2. Auflage. Berlin [u.a.] : Springer, 2000. – ISBN 978–3–540–67179–4

[LN04] Lim, S. ; Nam, K.: Loss-minimising control scheme for induction motors. In: *Electric Power Applications, IEE Proceedings* 151 (2004), Nr. 4, S. 385–397

[Lun13] Lunze, Jan: *Regelungstechnik 1.* Berlin : Springer, 2013 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–642–29533–1

[LY92a] Lorenz, R.D. ; Yang, S.-M.: AC induction servo sizing for motion control applications via loss minimizing real-time flux control. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28 (1992), Nr. 3, S. 589–593

[LY92b] Lorenz, R.D. ; Yang, S.-M.: Efficiency-optimized flux trajectories for closed-cycle operation of field-orientation induction machine drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28 (1992), Nr. 3, S. 574–580

[MP06] Müller, Germar ; Ponick, Bernd: *Grundlagen elektrischer Maschinen.* 9. Aufl. Weinheim : Wiley-VCH, 2006. – ISBN 978–3–527–40524–4

[MVP08] Müller, Germar ; Vogt, Karl ; Ponick, Bernd: *Berechnung elektrischer Maschinen.* 6. Aufl. Weinheim : Wiley-VCH, 2008. – ISBN 978–3–527–40525–1

[Ngu14] Nguyen, Thi Mai P.: *Beiträge zum Entwurf von Gleitregimereglern mit flachheitsbasierter Trajektorienvorgabe für Antriebssysteme.* Dresden : Shaker, 2014. – ISBN 978–3–844–03128–7

[OR] O'Connor, J. J. ; Robertson, E. F.: *The brachistochrone problem.* `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone.html`, Abruf: 2015-01-21

[Par29] Park, R. H.: Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part I. In: *Trans. Am. Inst. Electr. Eng.* 48 (1929), Nr. 3, S. 716–727

[Pie14] Pietruszka, Wolf D.: *MATLAB® und Simulink® in der Ingenieurpraxis.* Wiesbaden : Springer, 2014. – ISBN 978–3–658–06420–4

[QD08] Quang, Nguyen P. ; Dittrich, Jörg-Andreas: *Vector Control of Three-Phase AC Machines*. Dordrecht : Springer, 2008. – ISBN 978–3–540–79029–7

[Rud98] Rudolph, Joachim: *Flachheitsbasierte Folgeregelung*. 1998. – Vorlesungsskript TU Dresden

[Sch09] Schröder, Dierk: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–540–89612–8 978–3–540–89613–5

[Sch13] Schröder, Dierk: *Elektrische Antriebe - Grundlagen*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 978–3–642–30470–5 978–3–642–30471–2

[SDK13] Stumper, J.-F. ; Dotlinger, A ; Kennel, R.: Loss Minimization of Induction Machines in Dynamic Operation. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 28 (2013), Nr. 3, S. 726–735

[SK13] Stumper, J.-F. ; Kennel, R.: Real-time dynamic efficiency optimization for induction machines. In: *American Control Conference (ACC)*, 2013, S. 6589–6594

[SMCR93] Seleme, S.I. ; Mendes, E. ; Canudas, C. ; Razek, A.: Experimental validation of the minimum energy approach for induction motor control. In: *, International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1993. 'Systems Engineering in the Service of Humans', Conference Proceedings*, 1993, S. 78–83

[Stu13] Stumper, Jean-Francois: *Flatness-based predictive and optimal control for electrical drives*, Technische Universität München, special paper, 2013. `http://mediatum.ub.tum.de/?id=1099078`, Abruf: 2015-06-09

[VL03] Vukosavic, S.N. ; Levi, E.: A method for transient torque response improvement in optimum efficiency induction motor drives. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 18 (2003), Nr. 4, S. 484–493

[WB11] Waide, Paul ; Brunner, Conrad U.: *Energy-Efficiency Policy Opportunity for Electric Motor-Driven Systems*. Version: 2011. `http://www.iea.org/publications/freepublications`, Abruf: 2015-03-01

[WR99] Wit, C. Canudas d. ; Ramirez, J.: Optimal torque control for current-fed induction motors. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 5, S. 1084–1089