

Technische Universität Dresden  
Fakultät Elektrotechnik und  
Informationstechnik  
Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

**DIPLOMARBEIT**

Thema: Steuerung und Regelung eines nicht-holonomen  
Manipulatormodells

Vorgelegt von: Carsten Knoll (CarstenKnoll@gmx.de)

zum  
Erlangen des akademischen Grades

**DIPLOMINGENIEUR**  
(Dipl.-Ing.)

Betreuer: Dipl.-Ing. M. Franke (FhG/IIS/EAS, TUD)  
verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack

Tag der Einreichung: 19. April 2009



# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte Diplomarbeit zum Thema

*„Steuerung und Regelung eines nicht-holonomen Manipulatormodells“*

vollkommen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Dresden, den \_\_\_\_\_

Unterschrift \_\_\_\_\_

(Carsten Knoll)

## Vorwort

Das Anfertigen der vorliegenden Diplomarbeit war verbunden mit einer Menge Erfahrungen und Erkenntnisse. Meinem betreuenden Hochschullehrer Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack möchte ich aufs herzlichste danken, dass er diese Arbeit mit großem persönliche Interesse begleitet hat und meine Aufmerksamkeit auf die wichtigen Sachverhalte lenkte, mir aber gleichzeitig die Freiheit ließ, eigene Schwerpunkte zu setzen. Meinem Betreuer Dipl.-Ing Matthias Franke gilt mein besonderer Dank für die konstruktive Zusammenarbeit, die wertvollen Diskussionen und für das Aufwerfen von Fragen, welche den Erkenntnisprozess maßgeblich beeinflussten. Für ihr Verständnis und ihre Unterstützung gilt mein Dank allen Personen aus meinem Umfeld, in erster Linie jedoch meinen Eltern.

Die Ergebnisse der Arbeit basieren auf umfangreichen Simulationsuntersuchungen. Für deren Durchführung erwies sich die Nutzung der Programmiersprache Python und speziell das Programmpaket `scipy` als sehr geeignet. Damit steht einerseits die benötigte mathematische Funktionalität zur Verfügung und andererseits bietet Python ausgezeichnete Möglichkeiten problemorientierten Code zu erzeugen. Dadurch konnte der Aufwand für Wartung, Implementierung und Fehlersuche begrenzt werden. Um die Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse dieser Arbeit zu erleichtern, enthält der beiliegende Datenträger Quelltexte der wichtigen Simulationen und Visualisierungen.

## Kurzzusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Ansätze zur Steuerung und Regelung eines unteraktuierten und deshalb nicht-holonomen zweigliedrigen Manipulatormodells untersucht. Es wird angenommen, dass eines der Glieder mit der Basis über ein angetriebenes Drehgelenk verbunden ist, während die beiden Glieder untereinander durch ein reibungsfreies nicht aktuiertes Drehgelenk gekoppelt sind. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass die Bewegung ohne Einfluss der Gravitation stattfindet. Die Bewegungsgleichungen dieses Modells werden aufgestellt und partiell linearisiert. Bekannte Lösungsansätze zum Erreichen einer Ruhelage des Systems werden skizziert und ausgewählte Verfahren näher betrachtet. Dabei wird offensichtlich, dass diejenigen Ansätze, die von einem Modell mit einer Bremse oder signifikanter trockener Reibung im passiven Gelenk ausgehen, zu einfacheren und kürzeren Bewegungsabläufen führen, als jene, die ein reibungsfreies passives Drehgelenk voraussetzen, wie es auch in der vorliegenden Arbeit der Fall ist. Aus der Analyse des Regelungssystems geht eine Beschreibung des Manipulatormodells in Normalform hervor, welche das intuitive Verständnis des Bewegungsablaufes im Zustandsraum vereinfacht. Darauf aufbauend können verschiedene Teilprobleme identifiziert werden, deren Lösung insgesamt ein heuristisches Verfahren bildet, mit welchem eine Überführung des unteraktuierten Manipulatormodells zwischen zwei gegebenen Ruhelagen erreicht werden kann. Die zur Lösung der Teilprobleme notwendigen Manöver werden dabei mit einer Gleitregime-Regelung realisiert.

## Abstract

This diploma thesis treats the control problem of an underactuated and thus non-holonomic two-link-manipulator in the horizontal plane. The two revolute joints are assumed to be frictionless and the only actuator is placed in the joint, connecting the base with the first link. The equations of motion of this model are deduced and partially linearized. Known approaches to steer the manipulator into an equilibrium point are summarized and some of them are examined in more detail. Thereby it becomes obvious that approaches which rely on a brake or significant dry friction in the passive joint lead to relative simple and short movement patterns. In contrast this does not apply to approaches which are based on a model with a frictionless passive joint, as it is considered in the present thesis. From the analysis of the control system a representation of the model in normal form is obtained which simplifies the intuitive comprehension of the manipulator motion in state space. Based on this normal form several manoeuvres can be constructed. Each of them uses sliding mode control to perform a specific part of the transition task. Together these manoeuvres form a heuristic approach for the point-to-point control problem.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Aufgabenstellung</b>	<b>i</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Modellierung</b>	<b>3</b>
2.1 Kinetische Energie . . . . .	3
2.2 LAGRANGE-Formalismus . . . . .	5
2.3 HAMILTON-Formalismus . . . . .	7
2.4 Zustandsdarstellung und Gleichgewichtslagen . . . . .	9
2.5 Partielle Linearisierung . . . . .	11
2.5.1 Ausgang: Ellenbogenwinkel . . . . .	12
2.5.2 Ausgang: Schulterwinkel . . . . .	16
<b>3 Lösungsansätze aus der Literatur</b>	<b>18</b>
3.1 Chronologischer Überblick . . . . .	18
3.2 Entwurf einer zyklischen Steuerung basierend auf einer nilpotenten Approximation . . . . .	21
3.3 Trajektorienbestimmung durch Optimierung . . . . .	25
3.4 Trajektorienbestimmung durch Lösung einer Randwertaufgabe . . . . .	29
<b>4 Analyse des Regelungssystems</b>	<b>33</b>
4.1 Klassifizierung regelungstechnischer Problemstellungen . . . . .	33
4.2 Erhaltungsgrößen . . . . .	34
4.2.1 Eingang: Schultermoment $u$ . . . . .	35
4.2.2 Eingang: Schulterbeschleunigung $v$ . . . . .	36
4.2.3 Eingang: Ellenbogenbeschleunigung $v_2$ . . . . .	37
4.3 Symmetrie . . . . .	38
4.4 Phasenebene und Zustandstransformation . . . . .	40
4.4.1 Projektion in die $x_2$ - $x_4$ -Ebene . . . . .	40
4.4.2 Zustandstransformation in Byrnes-Isidori-Normalform . . . . .	41
4.4.3 Sektoranalyse in der $x_2$ - $\lambda$ -Ebene . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Heuristische Bewegungsplanung</b>	<b>46</b>
5.1	Gleitregime-Bremse . . . . .	47
5.2	Verhalten des Systems auf Gleitflächen . . . . .	54
5.3	Heuristische Gleitflächenplanung . . . . .	59
5.4	Manöver A: Beschleunigen und D: Bremsen . . . . .	61
5.5	Manöver B: Überführung der Ellenbogenwinkel- geschwindigkeit . . . . .	73
5.6	Manöver C: Überführung des Schulterwinkels . . . . .	76
5.7	Gesamtablauf . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>89</b>
	<b>Literatur</b>	<b>ix</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xii</b>

## Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole

**Notation**    **Bedeutung**

${}^*x$	Wert einer Variable (hier: $x$ ) zu Beginn eines Manövers
${}^\dagger x$	Wert einer Variable am Ende eines Manövers
${}^d x$	Sollwert
${}^e x$	Wert einer Variable in einer Ruhelage
${}^p x$	Wert in einer Parkposition
${}^0 x$	Konstanter Wert der Variable
${}'x$	Spezieller Wert der Variable

<b>Symbole</b>	<b>Bedeutung</b>	<b>Bezug</b>
$a_k$	Koeffizienten des Spline-Ansatzes	Gleichung (74), Abschnitt 3.4
$c_k$	Knotenpunkte des Spline-Ansatzes	Gleichung (74), Abschnitt 3.4
$D$	Drift-Term in der $x_2$ - $\lambda$ -Ebene	Gleichung (108), Abschnitt 4.4.2
$d$	Drift-Term in der $x_2$ - $x_4$ -Ebene	Gleichung (101), Abschnitt 4.4
$\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_4$	Intervalle für zulässige ${}^e x_3$	Abbildung 26, Abschnitt 5.4
$L$	Lagrangefunktion	Gleichung (9), Abschnitt 2.2
$M_1, \dots, M_3$	Trägheitskonstanten	Gleichung (6), Abschnitt 2.1
$\mathbf{M}$	Massenmatrix	Gleichung (12), Abschnitt 2.2
$\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_4$	Komponenten der Massenmatrix	Gleichung (6), Abschnitt 2.1
mod	Modulo-Operator	
$p_1$	Gesamtdrehimpuls des Systems	Gleichung (19), Abschnitt 2.3
$p_2$	Zu $q_2$ zugeordnete verallgem. Impulsgröße	Gleichung (19), Abschnitt 2.3
$q_1, q_2$	Gelenkwinkel	Abbildung 1, Abschnitt 2
$\mathcal{S}$	Gleitfläche	Abschnitt 5
$T$	Kinetische Energie	Gleichung (7), Abschnitt 2.1
$u$	Systemeingang, Drehmoment im Schultergelenk	Abschnitt 2.2
$V$	Potentielle Energie	Gleichung (8), Abschnitt 2.2
$v, v_2$	Eingangsgrößen der partiell linearisierten Systemdarstellungen	Gleichungen (52, 37), Abschnitte 2.5.2 und 2.5.1
$\mathbf{W}$	Inverse Massenmatrix	Gleichung (16), Abschnitt 2.2
$w_1, \dots, w_4$	Komponenten der inversen Massenmatrix	Gleichung (16), Abschnitt 2.2
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor	Gleichung (25), Abschnitt 2.4
$x_1, \dots, x_4$	Komponenten des Zustandsvektors	Gleichung (25), Abschnitt 2.4
$y$	Systemausgang	Gleichungen (33, 48), Abschnitte 2.5.2 und 2.5.1
$\mathbf{z}$	Zustandsvektor der Normalform	Gleichung (107)
$\beta$	Exponent in der Funktion $\psi$	Gleichung (120), Abschnitt 5.1



$\gamma_1, \gamma_2$	Reelle Parameter mit wechselnder Bedeutung	
$\varepsilon_1, \varepsilon_2,$	Begrenzungsparameter der zulässigen Teilintervalle für ${}^e x_3$	Abbildung 26, Abschnitt 5.4
$\eta$	Zusammengefasster Trägheitsparameter	Gleichung (30), Abschnitt 2.4
$\theta_k$	Ansatzfunktionen	Gleichung (74), Abschnitt 3.4
$\lambda$	In der Normalform neu auftretende Zustandsgröße	Gleichung (103), Abschnitt 4.4.2
$\mu$	Skalierungsfaktor der Potenzfunktion $\psi$	Gleichung (120), Abschnitt 5.1
$\Phi$	Schaltfunktion	Gleichung (113), Abschnitt 5
$\varphi$	Funktion, deren Graph die Schaltlinie bildet	Gleichung (112), Abschnitt 5
$\varphi'$	Erste Ableitung von $\varphi$	Gleichung (118), Abschnitt 5.1
$\sigma$	Drift-Richtungs-Indikator bezüglich der Eingangs-Wirkungs-Gerade	Gleichung (110)
$\tau$	Zeitkonstante	
$\psi$	Potenzfunktion zur Konstruktion der Schaltlinie	Gleichung (120), Abschnitt 5.1
$\psi'$	Erste Ableitung von $\psi$	Gleichung (122), Abschnitt 5.1
$\Omega, \omega, \tilde{\Omega}, \tilde{\omega}$	Hilfsfunktionen	Gleichungen (43 – 41), Abschnitt 2.5.1

**Bemerkung zur Notation:** In der Arbeit wird entgegen der im deutschen Sprachraum üblichen Schreibweise der Punkt („.“) als Dezimaltrennzeichen verwendet<sup>1</sup>. Hintergrund ist die Konsistenz zu automatisch generierten Achsenbeschriftungen in Abbildungen und die Eindeutigkeit bei der Angabe von Vektoren und Mengen, bei denen das Komma das Trennzeichen zwischen Komponenten bzw. Elementen darstellt.

<sup>1</sup> In Referenz [Rei06] wird dies ebenso gehandhabt.

# 1 Einführung

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist ein spezielles Manipulatormodell. Im Unterschied zu üblichen Roboterarmen, bei denen jeder mechanische Freiheitsgrad über eine Stellmöglichkeit verfügt, wird hier der Fall eines „unteraktuierten Manipulators“ behandelt. Konkret wird ein zweigliedriges Manipulatormodell betrachtet, dessen Arbeitsraum in der horizontalen Ebene des Anschauungsraumes liegt. Die Analogie dieses Modells zu einem menschlichen Arm rechtfertigt die Bezeichnungen „Ober-“ und „Unterarm“ für die Glieder sowie „Schulter-“ und „Ellenbogengelenk“ für die Drehgelenke. *Unteraktuiert* wird der Manipulator dadurch, dass nur im Schultergelenk eine Stellmöglichkeit zur Verfügung steht, der Ellenbogen also ein rein passives Gelenk darstellt<sup>2</sup>.

Betrachtet man die Bewegungsgleichungen, die in Kapitel 2 hergeleitet werden, so lässt sich die Drehmomentenbilanz am nicht-aktuierten Gelenk als Nebenbedingung auffassen. Diese lässt sich nicht integrieren und schränkt deshalb den Konfigurationsraum nicht ein. Für Systeme mit nicht integrierbaren Nebenbedingungen ist in der Literatur die auch im Titel der vorliegenden Arbeit genutzte Bezeichnung *nicht-holonom* (bzw. „*nonholonomic*“) üblich. Diesen Sprachgebrauch findet man oftmals ohne weitere Erläuterung [SKN96, BX96, LMO97], jedoch wird in den Referenzen [ON91, BS06] explizit darauf eingegangen.

Die Gründe, warum man sich mit der Steuerung eines solchen Manipulatormodells beschäftigen sollte, sind verschiedener Natur: Zunächst wird oft angeführt, dass sich für spezielle Anwendungen, beispielsweise aus dem Bereich der Weltraumrobotik oder der Prozessautomatisierung, durch den Verzicht auf einen Aktor Kosten und ggf. auch Gewicht und Energieverbrauch reduzieren lassen könnten [AT91, ON91, LMO97, MBS98, SH01]. Andererseits kann auch der Ausfall eines Aktors zu einem unteraktuierten System führen, sodass es denkbar wäre, mit einer darauf angepassten Steuerungstechnik die Verfügbarkeit des Systems zu erhöhen [BX96, SH01].

Die aus Sicht des Autors überzeugendste Motivation jedoch entbehrt weitgehend Bezüge zu einer möglichen Anwendung. Schon allein die Kombination eines einfachen Modells mit gleichzeitig herausfordernden regelungstechnischen Eigenschaften machen den betrachteten unteraktuierten Manipulator zu einem sehr interessanten Untersuchungsgegenstand. Ähnlich wird dies auch in Referenz [ON91] gesehen, wo basierend auf früheren Ergebnissen aus [Bro83], gefolgert wird, dass eine Ruhelage des Systems sich nicht durch eine glatte Zustandsrückführung stabilisieren lässt.

---

<sup>2</sup>Der Fall, ein unteraktuiertes Modell durch die Anordnung des Aktors im Ellenbogengelenk zu erhalten, wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Die vorliegende Arbeit betrachtet das Problem der Steuerung und Regelung des unteraktuierten Zweigelenkmanipulators unter verschiedenen Gesichtspunkten. Zunächst wird in Kapitel 2 das Modell des Systems aufgestellt und auf grundlegende Eigenschaften hin untersucht. Daran schließt sich in Kapitel 3 eine Betrachtung der in der Literatur beschriebenen Ansätze an. In Kapitel 4 werden spezielle Eigenschaften des Modells näher untersucht, von denen einige in Kapitel 5 zu einem Ansatz für die Ruhelagen-Überführung des Systems ausgebaut werden. Im abschließenden Kapitel 6 wird die Arbeit resümiert und es werden mögliche Richtungen weiterer Untersuchungen aufgezeigt.

## 2 Modellierung

Für eine regelungstechnische Untersuchung des unteraktuierten Manipulators, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt werden soll, ist die Repräsentation des Systems als mathematisches Modell unerlässlich. Ein solches Modell kann die Realität immer nur näherungsweise beschreiben. Im speziell betrachteten Fall werden die Manipulatorglieder als Starrkörper angenommen, welche sich in einer Ebene senkrecht zur Gravitation nach den Gesetzen der NEWTONschen Mechanik bewegen können. Durch diese Anordnung wird erreicht, dass die Bewegung der Glieder von keiner Potentialkraft beeinflusst wird. Von den jeweils drei unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Gliedes seien je zwei durch Drehgelenke verhindert. Das erste Drehgelenk, welches bereits als Schulter bezeichnet wurde, verbindet Glied 1 mit dem Bezugssystem, was als starr vorausgesetzt und der Robotik oft als *Basis* genannt wird. Das zweite Gelenk – der Ellenbogen – koppelt die beiden Glieder untereinander. Glied 1 stellt folglich den Oberarm und Glied 2 den Unterarm des Manipulators dar.

Eine Wechselwirkung des modellierten Systems mit der Umgebung wird nur über den Antrieb zugelassen. Der Antrieb wird dabei als Momentenquelle im ersten Gelenk aufgefasst, d. h. er erzeugt ein Drehmoment zwischen Glied 1 und der Basis. Beide Gelenke werden als reibungsfrei angenommen. Abbildung (1) visualisiert die beschriebenen Zusammenhänge und führt darüber hinaus Systemgrößen und -parameter ein.

Es gelte außerdem, dass eine vollständige Umdrehung eines Gelenks gegenüber einer Ausgangskonfiguration physikalisch keine Veränderung dieser hervorrufe<sup>3</sup>. Für den Konfigurationsraum kann deshalb

$$(q_1, q_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \quad (1)$$

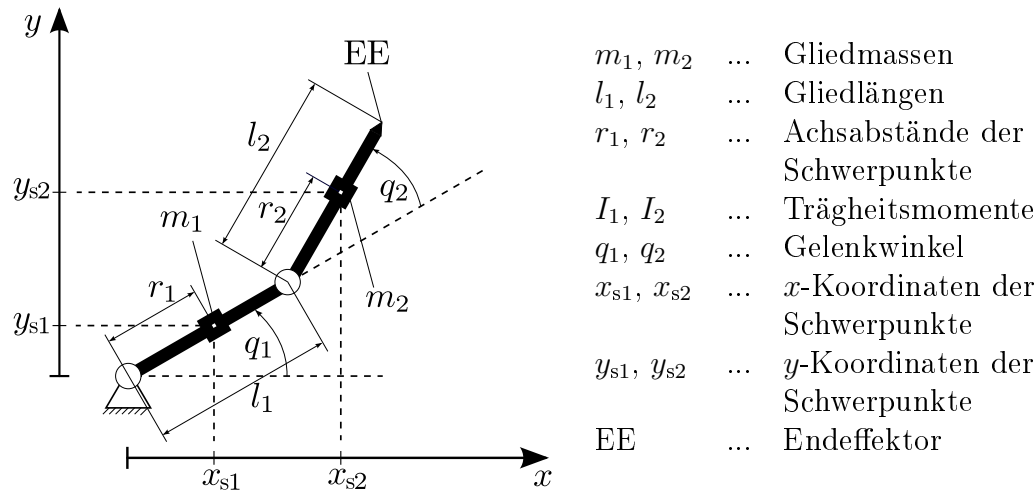
festgelegt werden. Für alle außerhalb der Intervalle liegenden Werte der Winkel können aufgrund der Voraussetzung die durch Modulo- $2\pi$ -Rechnung entstehenden Abbildungen ins Innere der Intervalle betrachtet werden.

Aufbauend auf diesen grundsätzlichen Überlegungen werden in den folgenden Abschnitten die Modellgleichungen hergeleitet. Für alle weiteren Betrachtungen wird nicht weiter zwischen dem *System* und seiner Repräsentation als *Modell* unterschieden, beide Begriffe werden mithin synonym verwendet.

### 2.1 Kinetische Energie

Die Modellgleichungen des ebenen Zweigelenkmanipulators lassen sich verhältnismäßig einfach aus der kinetischen Energie  $T$  des Systems herleiten. Zunächst muss

<sup>3</sup> Auch dies stellt ggf. eine Idealisierung dar, zum Beispiel in Hinblick auf sich um ein Gelenk wickelnde Sensorkabel.



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung des Zweigelenkmanipulators. Beide Glieder werden als Starrkörper aufgefasst, welche sich in der  $x$ - $y$ -Ebene bewegen können.

also für diese Größe ein mathematischer Ausdruck gefunden werden. Für  $n$  Starrkörper ergibt sich  $T$  aus der Summe der Terme für die jeweilige Bewegungsenergie der einzelnen Körper. Da in der betrachteten Ebene je eine Translation in  $x$ - und  $y$ -Richtung, sowie je eine Rotation möglich sind und speziell  $n = 2$  gilt, kann formal

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_{s1}^2 + \dot{y}_{s1}^2) + \frac{I_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_{s2}^2 + \dot{y}_{s2}^2) + \frac{I_2}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (2)$$

angegeben werden. Dabei bezeichnen  $\dot{x}_{si}$  bzw.  $\dot{y}_{si}$  die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Gliedes  $i \in \{1, 2\}$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung. Diese gilt es nun noch durch die Gelenkwinkel und -geschwindigkeiten auszudrücken, was mit Hilfe einfacher Beziehungen aus der ebenen Geometrie möglich ist. Unter Nutzung der Abkürzung  $q_{12} := q_1 + q_2$  erhalten wir

$$\dot{x}_{s1} = -r_1 \sin q_1 \dot{q}_1, \quad (3a)$$

$$\dot{y}_{s1} = r_1 \cos q_1 \dot{q}_1, \quad (3b)$$

$$\dot{x}_{s2} = -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - r_2 \sin q_{12} \dot{q}_{12} \quad \text{und} \quad (3c)$$

$$\dot{y}_{s2} = l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + r_2 \cos q_{12} \dot{q}_{12}. \quad (3d)$$

Durch Ausnutzung der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen, sowie der trigonometrischen Identität lassen sich die folgenden beiden Zwischenergebnisse anschreiben:

$$\dot{x}_{s1}^2 + \dot{y}_{s1}^2 = r_1^2 \dot{q}_1^2 \quad \text{und} \quad (4a)$$

$$\dot{x}_{s2}^2 + \dot{y}_{s2}^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 r_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_{12} + r_2^2 \dot{q}_{12}^2. \quad (4b)$$

Diese Beziehungen können wir in Gleichung (2) einsetzen und erhalten

$$T = \frac{1}{2}((I_1 + m_1 r_1^2) \dot{q}_1^2 + m_2(l_1^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 r_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_{12} + r_2^2 \dot{q}_{12}^2) + I_2 \dot{q}_{12}^2). \quad (5)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung bietet es sich an, unter anderem den Referenzen [ON91, LMO00, MRB06] folgend, die Trägheitskonstanten geeignet zusammenzufassen:

$$M_1 := I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2, \quad (6a)$$

$$M_2 := I_2 + m_2 r_2^2, \quad (6b)$$

$$M_3 := m_2 l_1 r_2. \quad (6c)$$

Mit diesen Abkürzungen lässt sich die kinetische Energie des Manipulators nun durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$T = \frac{1}{2}(M_1 \dot{q}_1^2 + M_2 \dot{q}_{12}^2 + 2M_3 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_{12}). \quad (7)$$

## 2.2 LAGRANGE-Formalismus

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen werden nun die LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art<sup>4</sup> für das betrachtete System aufgestellt<sup>5</sup>.

Da durch entsprechende Anordnung der Glieder die Gravitation keinen Einfluss auf ihre Bewegung ausübt und auch sonstige Potentialkräfte ausgeschlossen wurden, kann für die potentielle Energie

$$V \equiv 0 \quad (8)$$

angesetzt werden. Dies hat zur Folge, dass sowohl die als Hamilton-Funktion bezeichnete Gesamtenergie  $H$  als auch die Lagrange-Funktion  $L$  identisch zur kinetischen Energie sind:

$$H \equiv L \equiv T, \text{ mit } H := T + V \text{ und } L := T - V. \quad (9)$$

<sup>4</sup> In der Literatur finden sich u.a. auch die Bezeichnungen „D’ALAMBERTSches Prinzip in LAGRANGEScher Fassung“ [Rei06, Abschnitt 2.5.3] und „erweitertes HAMILTONSCHES Prinzip“ [Nol04, Abschnitt 1.3.4].

<sup>5</sup> Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Formalismus ist das vorliegen ausschließlich *holonom* Zwangsbedingungen bzw. ein Satz unabhängiger Koordinaten die die Konfiguration des Systems eindeutig beschreiben [Nol04, Abschnitt 1.2.5]. Die beiden Gelenkwinkel  $q_1$  und  $q_2$  stellen einen solchen Satz dar. Die im Titel dieser Arbeit vorkommende Formulierung „nicht-holonom“ steht dazu nicht im Widerspruch. Sie bezieht sich, wie in der Einleitung ausgeführt, auf die Bewegungsgleichungen, bspw. in der Form (15).

In allgemeiner Form lauten die LAGRANGESchen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \text{ mit } i \in \{1, 2\}, \quad (10)$$

wobei die  $Q_i$  die „generalisierten Kräfte“ darstellen [Kuy08, Abschnitt 6.2]. Für ihre konkrete Formulierung ist also die Bildung einer Reihe von Ableitungen der LAGRANGE-Funktion  $L$  notwendig:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (M_1 + M_2 + M_3 \cos q_2) \dot{q}_1 + (M_2 + M_3 \cos q_2) \dot{q}_2, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (M_2 + M_3 \cos q_2) \dot{q}_1 + M_2 \dot{q}_2, \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= (M_1 + M_2 + M_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (M_2 + M_3 \cos q_2) \ddot{q}_2 \\ &\quad - M_3 \sin q_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2), \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = (M_2 + M_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (M_2) \ddot{q}_2 - M_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (11d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} \equiv 0, \quad (11e)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -M_3 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2). \quad (11f)$$

Setzt man die Beziehungen (11) in die allgemeine Formulierung (10) ein, so erhält man zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die zeitliche Bewegung des Systems beschreiben. Da wir die Wirkung von Potentialkräften ausgeschlossen haben, wird durch die generalisierten Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  die Wirkung des Antriebsmomentes  $u$  modelliert. In den Gelenken auftretende Reibung würde ebenfalls durch diese Größen erfasst, jedoch soll diese, wie erwähnt, im Rahmen des hier behandelten Modells ausgeschlossen werden, sodass  $Q_1 = u$ ,  $Q_2 = 0$  gilt. Allerdings wird die Rolle der Reibung bei der Diskussion bereits bekannter Steuerungsverfahren in Kapitel 3 noch einmal beleuchtet.

### Matrizen-Darstellung

Für eine übersichtlichere Notation der Bewegungsgleichungen bedienen wir uns im folgenden der für mechanischen Systeme üblichen Matrizendarstellung. Dazu fassen wir zunächst die Koeffizienten der Winkelbeschleunigungen in der symmetrischen und  $q_2$ -abhängigen Massenmatrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} M_1 + M_2 + 2M_3 \cos q_2 & M_2 + M_3 \cos q_2 \\ M_2 + M_3 \cos q_2 & M_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 & \tilde{m}_2 \\ \tilde{m}_3 & \tilde{m}_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

zusammen, welche stets invertierbar ist. Dies lässt sich damit begründen, dass

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

gilt und  $\mathbf{M}$  positiv definit sein muss, weil für  $\mathbf{q} \neq (0,0)^T$  immer  $T > 0$  ist. Die übrigen Terme, welche nicht vom Eingang  $u$  abhängen, bilden dann den Vektor:

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} := M_3 \sin q_2 \begin{pmatrix} -(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

der die Wirkung von Zentrifugal- und Corioliskräften beinhaltet. Nun können wir die Beziehungen (10) und (11) durch die Matrixgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} = \mathbf{u} \quad (15)$$

wiedergeben. Dabei sei  $\mathbf{u} := (Q_1, Q_2)^T = (u, 0)^T$  der Vektor der eingprägten Drehmomente.

Um die erhaltene Gleichung nach den Winkelbeschleunigungen aufzulösen, führen wir die inverse Massenmatrix  $\mathbf{W}$  ein, die sich Dank der niedrigen Dimension leicht zu

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \tilde{m}_4 & -\tilde{m}_2 \\ -\tilde{m}_3 & \tilde{m}_1 \end{pmatrix} =: \mathbf{W} =: \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

berechnen lässt, wobei für die verwendete Determinante

$$\det \mathbf{M} = M_1 M_2 - M_3^2 \cos^2 q_2 \quad (17)$$

gilt. Die aufgelösten Bewegungsgleichungen lassen sich also als

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{C}) \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 u_1 - w_1 C_1 - w_2 C_2 \\ w_3 u_1 - w_3 C_1 - w_4 C_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

notieren, wobei  $w_i$  und  $C_i$  Ausdrücke darstellen, die vom Ellenbogenwinkel und, im Falle von  $C_1$  und  $C_2$ , auch von den Geschwindigkeiten abhängen. Hierauf aufbauend werden wir im Abschnitt 2.4 das System in eine Zustandsdarstellung überführen.

### 2.3 HAMILTON-Formalismus

Eine alternative Herangehensweise zur Herleitung von Gleichungen, welche das dynamische Verhalten des Systems beschreiben, ist unter dem Namen HAMILTON-



Formalismus bekannt [Rei06, Abschnitt 2.5.4]. Diese Methode setzt die Kenntnis der mechanischen Gesamtenergie  $H$  voraus und erfordert die Einführung der generalisierten Impulse  $(p_1, p_2)^T =: \mathbf{p}$  [Nol04, Abschnitt 2.2]:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}. \quad (19)$$

Da die Bewegung des betrachteten Manipulators von keinerlei potentieller Energie beeinflusst wird, ist, wie in Gleichung (9) bereits festgehalten, die kinetische Energie  $T$  identisch zur Hamilton-Funktion  $H$ . Drückt man  $H$  als Funktion der Koordinaten  $q_1, q_2$  und der verallgemeinerten Impulse  $p_1, p_2$  aus, so lauten die in Referenz [Nol04, Abschnitt 2.2] als *kanonisch* bezeichneten Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (20a)$$

$$\dot{p}_i = Q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (20b)$$

mit den generalisierten Lasten  $Q_i$  und  $i \in \{1, 2\}$ . Bisher kennen wir  $H$  jedoch nur als Funktion der Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten. Die Umrechnung auf eine Darstellung, welche die verallgemeinerten Impulse statt der Geschwindigkeiten enthält, wird durch die folgende Überlegung möglich: Aus den Gleichungen (13) und (19) lassen sich leicht

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{bzw.} \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p} \quad (22)$$

folgern. Mit letzterer Beziehung können wir in  $H$  die Abhängigkeiten von  $\dot{\mathbf{q}}$  zugunsten von  $\mathbf{p}$  eliminieren, denn einen Ausdruck für die Massenmatrix und ihre Inverse haben wir im vorangegangenen Abschnitt bereits aufgestellt. Darüber hinaus stellt Gleichung (22) aber bereits den ersten Teil der Bewegungsgleichungen (20) dar.

Aufgrund der Tatsache, dass die Energie des Systems nicht von  $q_1$  abhängt und am ersten Gelenk als Stellgröße das von außen eingeprägte Drehmoment  $Q_1 = u$  wirkt, kann man ohne weitere Rechnung

$$\dot{p}_1 = u \quad (23)$$

anschreiben. Für die letzte Bewegungsgleichung ist der Rechenaufwand dagegen etwas größer. Unter Berücksichtigung von  $Q_2 \equiv 0$  erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \dot{p}_2 = \frac{\sin q_2}{\det \mathbf{M}} & ((M_1 M_3 + M_3^2 \cos^2 q_2 + M_2 M_3 \cos q_2)(p_1 - p_2)p_2 + \\ & + M_2 M_3 \cos q_2 (p_2 - p_1)p_1 - M_1 M_3 \cos q_2 p_2^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Mit den Beziehungen (22), (23) und (24) liegen vier explizite Differentialgleichungen erster Ordnung vor. Diese bilden eine Zustandsraumdarstellung. Die Zustandsgrößen sind dabei die beiden Gelenkwinkel  $q_1$  und  $q_2$ , der Gesamtdrehimpuls  $p_1$  und die Impulsgröße  $p_2$ , deren physikalische Bedeutung nicht offensichtlich ist. In Bezug auf Positionierungsaufgaben haben die Impulsgrößen  $p_1$  und  $p_2$  weniger intuitive Aussagekraft als die Winkelgeschwindigkeiten, die in der LAGRANGESchen Formulierung stattdessen auftauchten, sodass wir für die meisten der nachfolgenden Überlegungen auf letztere zurückgreifen werden. Dazu überführen wir auch diese im nächsten Abschnitt in eine Zustandsdarstellung. Die nach dem HAMILTON-Formalismus hergeleiteten Bewegungsgleichungen werden jedoch in Abschnitt 4.2 bei der Untersuchung von Erhaltungsgrößen noch sehr nützlich sein<sup>6</sup>.

## 2.4 Zustandsdarstellung und Gleichgewichtslagen

Wie angekündigt werden wir nun die für die weitere Behandlung des Systems sehr zweckmäßige Darstellung im Zustandsraum einführen. Die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung (18) werden dabei in vier DGLn erster Ordnung umgeformt. Dazu wird der Zustandsvektor im  $\mathbb{R}^4$  definiert,

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)^T := (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)^T, \quad (25)$$

wobei für die Winkel  $x_1$  und  $x_3$ , die im Zusammenhang mit Gleichung (1) gemachten Bemerkungen gelten. Setzt man diese Zustandsgrößen in die Beziehung (18) ein und ergänzt sie um die Gleichungen  $\dot{x}_1 = x_2$  und  $\dot{x}_3 = x_4$ , erhält man die Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -w_1(x_3)C_1(\mathbf{x}) - w_2(x_3)C_2(\mathbf{x}) \\ x_4 \\ -w_3(x_3)C_1(\mathbf{x}) - w_4(x_3)C_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_1(x_3) \\ 0 \\ w_3(x_3) \end{pmatrix} u =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u. \quad (26)$$

Dieses System soll nun daraufhin untersucht werden, unter welchen Bedingungen die rechte Seite verschwindet, sich das System also in einer Ruhelage befindet. Zunächst ist klar, dass dafür  $x_2 = 0$  und  $x_4 = 0$  gelten muss. Aus dieser Bedingung folgt  $C_1 = C_2 = 0$  und damit  $\mathbf{f} = 0$ . Aus den Gleichungen (12) und (16) wissen wir, dass der Zähler von  $w_1$  gerade  $M_2$  und damit unabhängig vom Zustand ist. Mithin muss in jeder Ruhelage  $u=0$  sein.

<sup>6</sup> In Referenz [SKN96] wird in dieser Hinsicht ähnlich verfahren: Auf Basis der kanonischen Gleichungen werden Erhaltungsgrößen des Systems studiert, für den Entwurf einer Steuerung legt man dann aber die Zustandsdarstellung zugrunde, für deren Herleitung sich der LAGRANGE-Formalismus anbietet.

Die oft auch als „Gleichgewichtslagen“ bezeichneten Zustände  ${}^e\mathbf{x}$  für die

$$\mathbf{f}({}^e\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (27)$$

gilt, lassen sich also zu der Menge

$${}^e\mathcal{X} := \{{}^e\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : {}^e x_2 = {}^e x_4 = 0\} \quad (28)$$

zusammenfassen. Anschaulich bedeutet dies, dass, wenn sich der Manipulator nicht bewegt, *jede* beliebige Armstellung eine Gleichgewichtslage ist und es keine isolierten Gleichgewichtslagen gibt [AE08]. Dies wird durch das Fehlen einer Potentialkraft verursacht und hat eine wichtige Auswirkung: Die Linearisierung des Systems um eine Ruhelage ist nicht steuerbar. Es kann sogar gezeigt werden, dass es keine stetige zeitinvariante Zustandsrückführung gibt, welche eine bestimmte Gleichgewichtslage stabilisiert [ON91, Sp98, AE08].

### Starke Trägheitskopplung

In der auf Gleichung (26) folgenden Überlegung haben wir festgestellt, dass der Eingang  $u$  stets auf die Winkelbeschleunigung  $\dot{x}_2$  einwirkt. Für die Beschleunigung des zweiten Gelenkwinkels steht eine Untersuchung noch aus.

Anders als bei  $w_1$  steht im Zähler von  $w_3$  keine Konstante, sondern ein  $x_3$  abhängiger Term, wie offensichtlich wird, wenn man aus den Gleichungen (6), (12) und (16)

$$w_3 = -\frac{\tilde{m}_3}{\det \mathbf{M}} = -\frac{M_2 + M_3 \cos x_3}{\det \mathbf{M}} = -\frac{I_2 + m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 \cos x_3}{\det \mathbf{M}} \quad (29)$$

extrahiert. Kann es also bestimmte Konfigurationen des Arms geben, in denen  $w_3$  verschwindet? Offensichtlich hängt die Antwort darauf von den konkreten Werten der Trägheitsparameter ab. Allerdings lässt sich mit der Einführung des neuen Trägheitsparameters

$$\eta := M_3/M_2 = \frac{m_2 l_1 r_2}{I_2 + m_2 r_2^2} \quad (30)$$

eine einfache Bedingung aufstellen, die festlegt, ob  $w_3(x_3) = 0$  möglich ist, oder nicht: Für den Zähler von  $w_3$  kann man dann  $M_2(1 + \eta \cos x_3)$  schreiben und daran ablesen, dass für

$$\eta < 1 \quad (31)$$

$w_3$  für keinen Wert von  $x_3$  verschwinden kann.

Die Erfüllung dieser Bedingung wird in den Referenzen [Sp98, MRB06] als „starke Trägheitskopplung“ („strong inertial coupling“) bezeichnet. Sie ist u. a. Voraussetzung für die in Abschnitt 2.5.1 durchgeführte partielle Linearisierung. Dass  $\eta < 1$  keineswegs selbstverständlich ist, zeigt ein einfaches Beispiel: Ist der Unterarm ein homogener Stab, dann gilt  $I_2 = \frac{1}{12}m_2l_2^2$  und  $r_2 = \frac{1}{2}l_2$ . Damit vereinfacht sich Gleichung (30) zu  $\eta = \frac{3l_1}{2l_2}$ . Für die naheliegende Wahl  $l_1 = l_2$  liegt mithin keine starke Trägheitskopplung vor.

Wenn die Ungleichung (31) nicht gilt, dann kann  $w_3$  für bestimmte Werte von  $x_3$  verschwinden. Klar ist aber, dass für diese speziellen  $x_3$  gelten muss:

$$\dot{x}_3 \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right). \quad (32)$$

Mit anderen Worten: Konfigurationen, in denen  $\dot{x}_4$  durch den Eingang nicht beeinflusst werden kann, treten – wenn überhaupt – nur in der Nähe eines vollständig eingeklappten Ellenbogens auf.

## 2.5 Partielle Linearisierung

Eine verbreitete Methode zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme besteht in der Linearisierung durch Zustandsrückführung [SL91, Abschnitt 6], [Isi95, Abschnitt 4.2]. Der Systemeingang  $u$  wird dabei in Abhängigkeit der Zustandsgrößen und eines neuen – virtuellen – Eingangs  $v$  vorgegeben, sodass sich ein linearer dynamischer Zusammenhang zwischen dem Systemausgang und  $v$  ergibt. Die Eigenschaften des resultierenden Systems hängen dabei stark von der Definition des Ausgangs ab. Oft wird der Ausgang derart definiert, dass die für die Anwendung interessierenden Größen durch ihn repräsentiert werden. Alternativ kann der Ausgang auch speziell mit Blick auf günstige Eigenschaften des sich ergebenden Systems gewählt werden. Diese Herangehensweise wird bei flachheitsbasierten Entwurfsmethoden verfolgt [RRZ97]. Es kann jedoch gezeigt werden, dass das hier betrachtete System nicht über die Eigenschaft der differentiellen Flachheit verfügt. Mit einer ähnlichen Untersuchung lässt sich zwar ein Ausdruck für den Ausgang finden, der einen relativen Grad von  $r = 3$  besitzt, allerdings ergibt sich durch ihn keine offensichtliche Vereinfachung des Regelungsproblems.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Position des Endeffektors beeinflusst werden soll, die durch *beide* Gelenkwinkel bestimmt wird. Um eine übereinstimmende Anzahl von Eingangs- und Ausgangsgrößen zu erreichen, wie es für die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung notwendig ist, kann der Systemausgang jedoch nur aus einer Komponente bestehen. Naheliegend ist es, einen der beiden Gelenkwinkel als Ausgang zu wählen, allerdings ist zunächst nicht festgelegt welchen. Im Folgenden werden die beiden möglichen Fälle, d. h. a) Schulter- bzw. b)

Ellenbogenwinkel, auf die Erzielbarkeit von linearem Eingangs-Ausgangs-Verhalten, auf den relativen Grad und auf die Eigenschaften der internen Dynamik hin untersucht. Für ein systematischeres Verständnis betrachten wir zunächst Fall b).

### 2.5.1 Ausgang: Ellenbogenwinkel

Wir beginnen mit der Definition des Ausgangs

$$y := x_3 - {}^0x_3 \quad (33)$$

und stellen fest, dass der Eingang nach zweimaligem Differenzieren auftritt:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_3 = x_4, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_4 = -w_3(\mathbf{x})C_1(\mathbf{x}) - w_4(\mathbf{x})C_2(\mathbf{x}) + w_3(\mathbf{x})u. \end{aligned} \quad (34)$$

Der relative Grad ergibt sich also zu  $r_b = 2$ . Wir führen nun mit der Vorgabe

$$u = C_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{w_3(\mathbf{x})}(v_2 + w_4(\mathbf{x})C_2(\mathbf{x})). \quad (35)$$

einen neuen Eingang  $v_2$  ein, für den gilt:

$$\ddot{y} = v_2. \quad (36)$$

Da wir dabei durch  $w_3(\mathbf{x})$  dividieren, müssen wir, damit diese Vorgabe unabhängig von der konkreten Armstellung möglich ist, basierend auf den Erkenntnissen des Abschnittes 2.4 die Forderung nach starker Trägheitskopplung stellen, d. h. es muss  $\eta < 1$  gelten. Wir erhalten dann die partiell linearisierte Systemdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{\tilde{m}_3(\mathbf{x})}C_2(\mathbf{x}) \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\tilde{m}_4}{\tilde{m}_3(\mathbf{x})} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{\eta \sin x_3}{1+\eta \cos x_3}x_2^2 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{1+\eta \cos x_3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2, \end{aligned} \quad (37)$$

in der  $\eta$  der einzige verbleibende Modellparameter ist. Diese Modelldarstellung, in der der nicht-aktuierte Gelenkwinkel den Ausgang bildet, wird in Referenz [Sp98] als „nicht-kollozierte Linearisierung“ („non-located linearization“) bezeichnet.

Während die unteren beiden Zeilen des Gleichungssystems (37) die beabsichtigte lineare Dynamik  $\ddot{y} = v_2$  beschreiben, bilden die oberen beiden die *interne*

*Dynamik*, welche nun weiter untersucht wird. Eine solche Untersuchung ist im Allgemeinen schwierig durchzuführen [SL91, S. 220], da auch das interne Teilsystem vom Eingang und den Zustandsgrößen des externen Teilsystems abhängt. Oftmals ist eine Betrachtung der *Nulldynamik* hilfreich, d. h. des dynamischen Verhaltens des internen Teilsystems, unter der Bedingung  $y \equiv 0$ . Im vorliegenden Fall kann jedoch auch für die allgemeinere Bedingung

$$\ddot{y} = v_2 \equiv 0, \quad (38)$$

welche die „Ausgangsnullung“ [Sch99] als Spezialfall einschließt, eine Aussage getroffen werden. Unter dieser Bedingung gilt für die Größen des externen Teilsystems

$$x_4(t) = {}^0x_4 = \text{const.}, \quad (39a)$$

$$x_3(t) = {}^0x_3 + {}^0x_4 t, \quad (39b)$$

wobei zunächst  ${}^0x_4 \neq 0$  angenommen wird. Für die Winkelgeschwindigkeit in der Schulter vereinfacht sich die zweite Zeile von (37) zu einer separierbaren Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{x}_2 = - \underbrace{\frac{\eta \sin x_3}{1 + \eta \cos x_3}}_{=: \tilde{\omega}(x_3)} x_2^2. \quad (40)$$

Die Lösung dieser Gleichung setzt eine Integration der Koeffizientenfunktion

$$\omega(t) := \tilde{\omega}(x_3(t)) := - \frac{\eta \sin x_3(t)}{1 + \eta \cos x_3(t)} \quad (41)$$

voraus. Die Stammfunktion von  $\tilde{\omega}$  kann durch elementare Integration gebildet oder beispielsweise Referenz [MMW01, S. 108] entnommen werden:

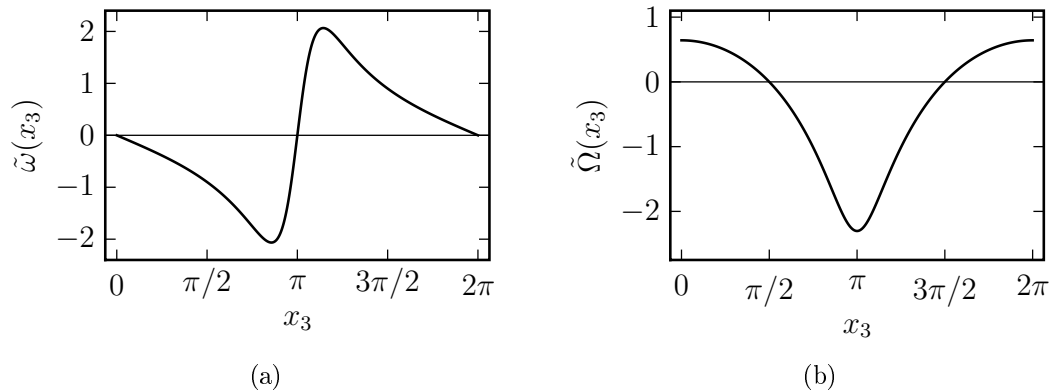
$$\int - \frac{\eta \sin x_3}{1 + \eta \cos x_3} dx_3 = \ln |1 + \eta \cos x_3| =: \tilde{\Omega}(x_3). \quad (42)$$

In Abbildung 2 sind die beiden Funktionen  $\tilde{\omega}(x_3)$  und  $\tilde{\Omega}(x_3)$  dargestellt.

Unter Einbeziehung der Gleichungen (39) können wir nun die *zeitliche* Integration durchführen. Wir erhalten

$$\int_0^t \omega(t') dt' = \frac{1}{{}^0x_4} \left[ \tilde{\Omega}(x_3(t')) \right]_0^t = \frac{1}{{}^0x_4} (\tilde{\Omega}({}^0x_3 + {}^0x_4 t) - \tilde{\Omega}({}^0x_3)) = \frac{1}{{}^0x_4} \Omega(t) \quad (43a)$$

$$\text{mit } \Omega(t) := \ln |1 + \eta \cos({}^0x_3 + {}^0x_4 t)| - \ln |1 + \eta \cos {}^0x_3|. \quad (43b)$$



**Abbildung 2:** Funktionsverläufe von (a)  $\tilde{\omega}(x_3)$  und (b)  $\tilde{\Omega}(x_3)$ . Beide Darstellungen zeigen jeweils eine Periode und in beiden Graphen gilt  $\eta = 0.9$ .

Auf Basis dieser Überlegungen kann man jetzt mit der Methode der Trennung der Veränderlichen die Lösung der DGL (40) bestimmen. Aus dem Ansatz

$$\int_{0x_2}^{x_2(t)} x_2^{-2} dx_2 = \int_0^t \omega(t') dt' \quad (44)$$

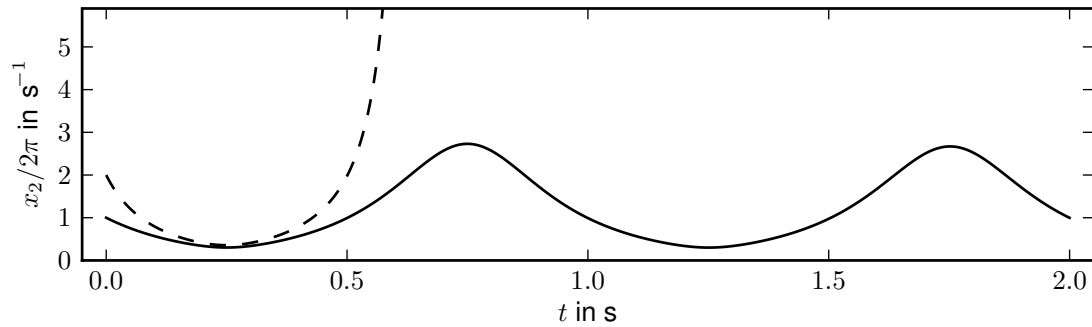
folgt nach Ausführen der Integration und Einsetzen von Gleichung (43b)

$$x_2(t) = \frac{0x_2}{1 - \frac{0x_2}{0x_4} \Omega(t)}. \quad (45)$$

Die zeitliche Entwicklung von  $x_2$  ergibt sich aus den Gleichungen (45, 43b) in Abhängigkeit der drei Anfangswerte  $0x_2$ ,  $0x_3$  und  $0x_4$ . Eine interessante Frage ist nun, unter welchen Bedingungen der Nenner der rechten Seite von Gleichung (45) verschwinden kann und damit  $x_2$  in endlicher Zeit über alle Grenzen wächst. Damit dieser Fall nicht eintritt, müsste die folgende Bedingung gelten:

$$1 - \frac{0x_2}{0x_4} \Omega(t) > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (46)$$

Ist der Nenner zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  kleiner als null, hat dies sein Verschwinden zu einem anderen Zeitpunkt als Konsequenz, aufgrund der Stetigkeit und der Periodizität von  $\Omega(t)$  und der Tatsache, dass diese Funktion Nullstellen hat. Aus Ungleichung (46) kann man mittels der Beziehung (43b) über eine Fallunterscheidung bezüglich der (Un-)Gleichheit der Vorzeichen der Anfangswerte beider Geschwindigkeiten zwei Bedingungen formulieren, welche sicherstellen,



**Abbildung 3:** Simulierter Zeitverlauf  $x_2(t)$  für unterschiedliche Anfangsbedingungen. In beiden Fällen gilt:  ${}^0x_3 = \pi/2$ ,  ${}^0x_4/2\pi = 1 \text{ s}^{-1}$ . Für die Schulterwinkelgeschwindigkeit gilt in einem Fall  ${}^0x_2 = {}^0x_4$  (durchgezogene Linie), und im anderen  ${}^0x_2 = 2{}^0x_4$  (strichliert). Im zweiten Fall wird also Bedingung (47a) verletzt, denn es gilt  $\cos {}^0x_3 = 0$  und damit  $\ln 1.9 \approx 0.64 \not\prec \frac{1}{2}$ . Deutlich sichtbar ist der periodische Charakter der zur ersten Anfangsbedingung gehörenden Lösung. Auch die Lage der senkrechte Asymptote der Lösung mit endlicher Fluchtzeit lässt sich gut abschätzen.

dass  $x_2(t)$  wohldefiniert ist:

$$\ln \left| \frac{1 + \eta}{1 + \eta \cos {}^0x_3} \right| < \frac{{}^0x_4}{{}^0x_2}, \quad \text{für } {}^0x_2 {}^0x_4 > 0, \quad (47a)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \eta}{1 + \eta \cos {}^0x_3} \right| > \frac{{}^0x_4}{{}^0x_2}, \quad \text{für } {}^0x_2 {}^0x_4 < 0 \quad (47b)$$

Es können also je nach Anfangswerten Konstellationen auftreten, in denen der Nenner für bestimmte  $t$  null wird. Ebenso gibt es Konstellationen, in denen dieser Fall nicht eintritt.

Als Konsequenz halten wir fest, dass es bei Vorgabe der Ellenbogenbeschleunigung  $\dot{x}_4 = v_2$  zu Situationen kommen *kann*, welche eine „endliche Fluchtzeit“ (auch „endliche Entweichzeit“ [Aul04, Abschnitt 2.5]) der Schulterwinkelgeschwindigkeit verursachen. Weiterhin stellen wir fest, dass es aufgrund der Periodizität von  $\Omega(t)$ , *nur* die beiden Fälle „endliche Fluchtzeit“ oder „periodisches Verhalten von  $x_2(t)$ “ gibt. Besonders erstere Erkenntnis muss Beachtung finden, wenn eine derartige Vorgabe Teil einer Regelstrategie sein soll. Abbildung 3 zeigt zur Untermauerung der Resultate Simulationsergebnisse für eine kritische und eine unkritische Wahl von Anfangsbedingungen.

Eine abschließende Bemerkung sei dem Fall  ${}^0x_4 = 0$  gewidmet. Aus den Gleichungen (33, 34) lesen wir ab, dass dann  $y \equiv 0$  gilt, und damit  $x_3$  konstant auf seinem Anfangswert verharret. Dies ist der Fall der oben mit „Ausgangsnullung“ bezeich-



net wurde. Die Koeffizientenfunktion  $\tilde{\omega}$  in Gleichung (40) ist dann zeitkonstant. Dies muss bei der Integration der Differentialgleichung berücksichtigt werden. Als Nenner der Lösung erhält man eine in  $t$  affine Funktion, mit anderen Worten eine Gerade. Für  $\sin {}^0x_3 = 0$  ist diese parallel zur  $t$ -Achse und man erhält die konstante Lösung  $x_2 \equiv {}^0x_2$ . Andernfalls hat die Gerade eine Nullstelle, die entweder bei  $t < 0$  oder bei  $t > 0$  liegen kann. Abhängig von den Anfangsbedingungen  ${}^0x_2$  und  ${}^0x_3$  gibt es also auch für die Nulldynamik Konstellationen mit oder ohne endliche Fluchtzeit. Insgesamt ist die Nulldynamik instabil.

### 2.5.2 Ausgang: Schulterwinkel

Nun wenden wir uns dem Fall a) zu und wählen als Ausgang

$$y := x_1 - {}^0x_1. \quad (48)$$

Auch hierbei tritt der Eingang nach zweimaligem Differenzieren auf:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -w_1(\mathbf{x})C_1(\mathbf{x}) - w_2(\mathbf{x})C_2(\mathbf{x}) + w_1(\mathbf{x})u. \end{aligned} \quad (49)$$

Für den relativen Grad heißt das, analog zu oben,  $r_a = 2$ . Mit der Wahl

$$u = C_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{w_1(\mathbf{x})}(v + w_2(\mathbf{x})C_2(\mathbf{x})) \quad (50)$$

kann wieder ein neuer Eingang,  $v$ , eingeführt werden, für welchen gilt:

$$\ddot{y} = v. \quad (51)$$

Mit diesem Eingang lautet die Systemdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ -\frac{1}{\tilde{m}_4}C_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\tilde{m}_3(\mathbf{x})}{\tilde{m}_4} \end{pmatrix} v \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ -\eta \sin x_3 x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -(1 + \eta \cos x_3) \end{pmatrix} v \end{aligned} \quad (52)$$

Wie erwartet, bilden hier die oberen beiden Zeilen das lineare Eingangs-Ausgangs-Verhalten, während die unteren beiden Zeilen der Vektorgleichung die zugehörige interne Dynamik darstellen. In Referenz [Sp98] wird diese Darstellung, als „kollokierte Linearisierung“ bezeichnet.

Die Erfahrung aus der obigen Betrachtung des Falls b) lassen die Frage aufkommen: Kann auch für diese interne Dynamik der Fall einer endlichen Fluchtzeit eintreten, d. h. kann auch bei externer Vorgabe der Schulterwinkelbeschleunigung die Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit in endlicher Zeit über alle Grenzen wachsen?

Abermals versuchen wir für unsere Überlegungen eine möglichst breite Gültigkeit zu erreichen. Während im Fall b) für die Untersuchung der internen Dynamik das Verschwinden des Eingangssignals gefordert wurde und dadurch explizite Lösungen mit endlicher Fluchtzeit bestimmt werden konnten, genügt es nun sogar, wenn lediglich eine obere Schranke für  $|v(t)|$  und  $|x_2(t)|$  vorausgesetzt wird. Unter diesen Bedingungen kann die globale Existenz der Lösung von (52) aus einer einfachen Überlegung geschlussfolgert werden: Durch die Beschränkungen von  $|x_2|$ ,  $|v|$ ,  $|\sin x_3|$  und  $|\cos x_3|$  ist  $\dot{x}_4$  ebenfalls beschränkt. Dies heißt aber nichts anderes, als dass es stets eine affine Funktion der Zeit gibt, die schneller wächst bzw. fällt als  $x_4(t)$ . Da solche Geradengleichungen für alle  $t \in \mathbb{R}$  erklärt sind, gilt dies auch für  $x_4(t)$ .

Es sei angemerkt, dass der Fall der Nulldynamik ein Spezialfall der diskutierten Verhältnisse darstellt: Die Situation  $y \equiv 0$  liegt genau dann vor, wenn die oberen Schranken für die Beträge von  $x_2$  und  $v$  zu Null gesetzt werden, und man den Anfangswert  ${}^0x_1$  entsprechend wählt. Dann gilt  $\dot{x}_4 = 0$ , d. h. der Unterarm kreist mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, während der Oberarm steht. Auch dies stellt formal ein instabiles Verhalten dar, da  $x_3(t)$  nicht begrenzt bleibt. Dieses Verhalten ist jedoch unbedenklich, da, wie eingangs erwähnt,  $x_3$  und  $x_3 \bmod 2\pi$  den selben physikalischen Zustand des Systems beschreiben.

Zusammenfassend kommen wir zu dem Schluss, dass von beiden untersuchten Varianten der Fall a), d. h. die Vorgabe der Oberarmbeschleunigung, offensichtlich günstigere Eigenschaften in sich birgt. Zum einen unterliegt die Zulässigkeit der durchgeführten Transformation zur Einführung des neuen Eingangs  $v$  keinen Bedingungen an  $\eta$  und zum anderen verhält sich das System gemessen am Fall b) „unkritisch“. Zwar ist die interne Dynamik in beiden Fällen instabil, jedoch können wir im Fall a) für gegebene begrenzte Trajektorien der externen Dynamik sicherstellen, dass der Fall endlicher Fluchtzeit nicht auftritt. Da typischerweise die für die externen Größen vorgegebenen Trajektorien sowohl in zeitlicher Hinsicht, als auch in Bezug auf ihren Wertebereich begrenzt sind, ist dies eine sinnvolle Annahme. Es liegt deshalb auf der Hand die zu erarbeitenden Ansätze einer Regelung in Kapitel 5 auf der Variante a) der partiellen Linearisierung aufzubauen. Zuvor wird in Abschnitt 4.4 diese Modelldarstellung jedoch noch in Normalform überführt.

### 3 Lösungsansätze aus der Literatur

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die dem Autor bekannten und als wesentlich erscheinenden Ansätze zur Steuerung bzw. Regelung des unteraktuierten Zweigelenkmanipulators kurz vorgestellt. In den folgenden drei Abschnitten werden dann ausgewählte Ansätze genauer betrachtet.

#### 3.1 Chronologischer Überblick

Zunächst ist festzuhalten, dass man sich diesem speziellen System erst in den letzten zwei Jahrzehnten angenommen hat. Der früheste hier behandelte Ansatz wird in seiner praktischen Umsetzung in Referenz [AT91] vorgestellt und setzt eine Halte-Bremse im Ellenbogengelenk voraus. Er besteht im Wesentlichen daraus, dass zunächst auf Basis einer nicht-kollokierten Linearisierung bei deaktivierter Bremse dieses Gelenk positioniert wird. Danach kann mit aktivierter Bremse der Oberarm auf Basis einer kollokierten Linearisierung leicht in die gewünschte Lage gebracht werden, ohne dass sich der Ellenbogenwinkel dabei ändert. Die Haltebremse ermöglicht also eine Entkopplung der Positionierungsvorgänge und ihre zeitliche Nacheinanderausführung.

In Abschnitt 2.5.1 wurde auf die für die nicht-kollokierten Linearisierung problematische interne Dynamik hingewiesen, welche zu sehr großen Schulterwinkelgeschwindigkeiten führen kann. Obwohl in der Quelle nicht explizit auf diesen Sachverhalt eingegangen wird, sieht der darin präsentierte Ansatz die Planung einer Trajektorie für den Ellenbogenwinkel derart vor, dass eine bestimmte Begrenzung des Eingangsmomentes nicht überschritten wird.

Aus ungefähr dem selben Zeitraum stammt Referenz [ON91]. Darin werden zum einen allgemeine Bedingungen zur Integrabilität<sup>7</sup> der aus der Momentenbilanz des passiven Gelenks resultierenden Gleichung präsentiert. Als Beispiel wird auch auf das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Modell, d. h. den ebenen Zweigelenkmanipulator ohne Einfluss von Gravitation und ohne Reibung, eingegangen, und gezeigt, dass für dieses die entsprechende Beziehung nicht integrabel ist. Weiterhin wird für dieses Beispiel gezeigt, dass mit einem linearen PD-Regler für  $x_1$  eine Menge  ${}^e\mathcal{M}$  von Ruhelagen asymptotisch stabilisiert werden kann, die gegenüber der Menge aller Ruhelagen,  ${}^e\mathcal{X}$ , eingeschränkt ist:

$${}^e\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in {}^e\mathcal{X} : x_1 = {}^d x_1\}. \quad (53)$$

Als Stellgröße wird das Schultermoment aufgefasst, sodass eine partielle Linearisierung nicht notwendig ist.

---

<sup>7</sup>Eine DGL heißt *integrabel*, wenn ihre Lösung auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden kann [Kuy08, Abschnitt 8.6].

Dem üblichen Problem, also der Überführung des Manipulators in eine bestimmte Ruhelage widmet sich Referenz [SKN96], wobei das passive Gelenk ebenfalls reibungsfrei modelliert und auch keine Bremse vorausgesetzt wird. Speziell wird eine Methode vorgestellt, um mit einem zeitperiodischen Eingangssignal die Ruhelage ausgehend von einem Zwischenzustand  $({}^d x_1, 0, {}'x_3, {}'x_4)$  mit beliebigen  $'x_3$  und  $'x_4$  zu erreichen. Dieser Zwischenzustand kann von einem beliebigen Ausgangszustand zum Beispiel mittels des oben genannten PD-Reglers erreicht werden. Die präsentierte Methode besteht in einer Amplitudenmodulation des Eingangssignals. Es wird dabei eine Modelldarstellung benutzt, die dem nach Variante a) partiell linearisierten System entspricht. Für das Eingangssignal wird die zeitperiodische Funktion

$$v = \gamma \cos(\bar{\omega}t) \quad (54)$$

angesetzt, wobei  $\bar{\omega}$  eine reelle Konstante ist und  $\gamma$  als neuer Eingang aufgefasst wird. Dieser ist während eines Zyklus' konstant, sodass an dessen Ende das Schultergelenk in der selben Lage steht wie an dessen Anfang. Zu Beginn eines Zyklus' wird  $\gamma$  derart gewählt, dass sich eine Trajektorie ergibt, deren in die  $x_3$ - $x_4$ -Ebene projizierte POINCARÉ-Abbildung auf einer Ellipse liegt. Speziell wird eine Ellipse gewählt, welche die  $x_3$ -Achse im Punkt  ${}^d x_3$  schneidet. Für den letzten Zyklus wird dann  $\gamma$ , abweichend von der sonstigen Rückführung<sup>8</sup>, derart bestimmt, dass der nächste – und damit letzte – Punkt der POINCARÉ-Abbildung in der  $x_3$ - $x_4$ -Ebene möglichst nahe an  $({}^d x_3, 0)$  liegt. Mit dieser Methode kann also nur eine Umgebung der Zielruhelage erreicht werden. Diese ist um so kleiner, je größer der Parameter  $\bar{\omega}$  ist.

Nahezu zeitgleich wurde in Referenz [BX96] ein Ansatz für  $N$ -gliedrige unteraktivierte Manipulatoren veröffentlicht, der mit  $N = 2$  auf das hier betrachtete System bezogen werden kann. Dabei wird mittels eines Gleitregime-Reglers zunächst das passive Gelenk in die beabsichtigte Lage geführt, wo es mit Hilfe einer Bremse fixiert wird. Die nachfolgende Positionierung des aktiven Gelenks ist anschließend leicht möglich.

Ohne Halte-Bremse und ohne Reibung, die sich in ähnlicher Weise ausnutzen lässt<sup>9</sup>, kommt der in Referenz [LMO97] vorgestellte Ansatz zum Erreichen einer gegebenen Ruhelage aus. Wesentliches Werkzeug ist die nilpotente Approximation des

<sup>8</sup>Eine „Rückführung“ der Abweichung von der Ellipse findet jeweils für die Berechnung von  $\gamma$  am Beginn des Zyklus' statt.

<sup>9</sup>Zumindest, wenn sie einen COULOMBSchen (oder „trockenen“) Anteil hat, d. h. einen Anteil, der nur von der Bewegungsrichtung abhängt.

Systems. Darauf aufbauend kann eine Steuerung entworfen werden, die den Manipulator iterativ an die Soll-Ruhelage heranführt. In Abschnitt 3.2 wird die Herangehensweise näher beschrieben.

Die in [MBS98] präsentierte Variante zum Wechsel zwischen zwei Ruhelagen setzt wieder eine Bremse am Ellenbogengelenk voraus. In dieser Referenz wird die instabile interne Dynamik bei Verwendung der nicht-kollokierten partiellen Linearisierung explizit angesprochen. Dem Problem wird begegnet, indem zwischen zwei Regelalgorithmen gewechselt wird: Ein PD-Regler strebt die gewünschte Lage des Ellenbogens an, provoziert dabei aber ggf. ein sehr starkes Anwachsen der Schulterwinkelgeschwindigkeit. Dadurch wird ein bestimmtes Gebiet im Zustandsraum verlassen, was zur Folge hat, dass ein Gleitregime-Regler aktiviert wird, der das aktive Gelenk in dessen Soll-Lage abbremst. In diesem als Dämpfungs-Regelung („damping control“) bezeichnetem Modus ist die Haltebremse aktiviert.

In Referenz [SH00] wird der Arbeitspunktwechsel des unteraktuierten Manipulators als zeitdiskretes Problem betrachtet. Auf Basis der kollokierten Linearisierung wird für den Eingang  $v$  eine stückweise konstante Funktion der Zeit angesetzt. Die Trajektorienplanung erfolgt dann als Bestimmung der Funktionswerte dieser durch die Lösung eines Optimierungsproblems. In Abschnitt 3.3 wird dieses Verfahren näher beleuchtet. Es sei vorweggenommen, dass die Optimierungsaufgabe numerisch problematisch wird, wenn die Haftreibung im passiven Gelenk gegen null geht.

Zusätzlich wird in der Quelle eine Stabilisierung auf der vorab berechneten Trajektorie vorgestellt, die ebenfalls aus der zeitdiskreten Betrachtung abgeleitet wird. Mit dieser ist es möglich, trotz Parameteränderungen durch Aufnahme einer Last am Endeffektor, die Zielruhelage zu erreichen, ohne eine neue Trajektorie berechnen zu müssen.

Die jüngste der hier skizzierten Varianten stammt aus Referenz [MRB06]. Darin wird von einer signifikanten Haftreibung im Ellenbogengelenk ausgegangen. Die vorgeschlagene Methode basiert auf der Strategie mittels der nicht-kollokierten Linearisierung zunächst das passive Gelenk zu positionieren, danach das Schultergelenk „behutsam“ abzubremsen, sodass sich der Ellenbogenwinkel aufgrund der Haftreibung nicht mehr verändern kann und es schließlich ebenso behutsam in die Endlage zu steuern. Für die Positionierung des Ellenbogens wird dabei ein Gleitregime-Regler genutzt, der sich an [BB98] orientiert. Dem in Abschnitt 2.5.1 besprochenem Problem der instabilen internen Dynamik und der damit verbundenen ggf. auftretenden endlichen Fluchtzeit wird keine Beachtung geschenkt.

Diskussionswürdig ist die Argumentation, mit welcher das explizite Einbezie-

hen der Haftreibung in die Regelstrategie motiviert, bzw. es als Problem bezeichnet wird, dies nicht zu tun. Während es einerseits zutrifft, dass die Vernachlässigung der Reibung eine *Vereinfachung des Modells* darstellt, muss andererseits betont werden, dass eine signifikante Haftreibung im Ellenbogengelenk eine einfache Möglichkeit der zeitlichen Entkopplung der Positionierung der einzelnen Gelenke zulässt, und damit eine deutliche *Vereinfachung des Regelungsproblems* mit sich bringt. In der Tat ähnelt dieser Ansatz denjenigen, die eine Haltebremse vorsehen. Darüberhinaus muss bezweifelt werden, dass durch eine übliche Kugellagerung die Haftreibung nicht soweit reduziert werden kann, dass ihre Vernachlässigung kein grober Modellierungsfehler ist. Anders sieht es aus, wenn der Manipulator erst durch Ausfall eines Antriebs zum unteraktuierten System wird. Dann ist tatsächlich mit erheblicher Reibung zu rechnen.

Zusammenfassend können zwei Entwicklungsrichtungen unterschieden werden: Die eine hat ihren Fokus auf verhältnismäßig einfacher und schneller Positionierung des Endeffektors und nimmt dabei die Notwendigkeit einer Bremse bzw. von signifikanter Haftreibung in Kauf [AT91, BX96, MBS98, SH00, MRB06]. Die andere verzichtet auf diese vereinfachenden Elemente [ON91] und versucht mit recht umfangreichen theoretischen Betrachtungen und daraus resultierenden aufwendigen Manövern eine Zielruhelage zu erreichen [SKN96, LMO97]. Der in Kapitel 5 der vorliegenden Arbeit betrachtete Ansatz lässt sich tendenziell letzterer Kategorie zuordnen.

In den beiden folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden zwei der umrissenen Ansätze näher betrachtet. In Abschnitt 3.4 wird dann eine bisher hier nicht erwähnte Herangehensweise untersucht, die u.a. in Referenz [GHZ05] präsentiert wird, wobei das in der Quelle betrachtete System nicht der Zweigelenkmanipulator mit passivem Ellenbogen ist, sondern das – ebenfalls unteraktuierte – invertierte Pendel mit verschieblichem Fuß.

### 3.2 Entwurf einer zyklischen Steuerung basierend auf einer nilpotenten Approximation

In diesem Abschnitt wird die in den Referenzen [LMO97, LMO00] vorgestellte Herangehensweise betrachtet, einen Arbeitspunktwechsel des ebenen unteraktuierten Manipulators zu erreichen, ohne auf eine Bremse oder die Wirkung von Reibung zurückgreifen zu können. Die vorgegebene Endposition wird durch iteratives Anwenden einer speziellen Steuerung erreicht. Um diese zu bestimmen, wird das Modell zunächst partiell linearisiert, wobei der Schulterwinkel als Ausgangsgröße aufgefasst wird, um es in eine Form vergleichbar mit (52) zu bringen. Danach wird eine *nilpotente Approximation* durchgeführt. Dazu werden die Komponenten der

beiden Vektorfelder der Systemdynamik durch ihre Entwicklung als Taylorreihe bis zu einer bestimmten Ordnung ersetzt. Daraus resultiert eine näherungsweise Systemdarstellung in sog. *privilegierten Koordinaten*, welche die gleichen Steuerbarkeitseigenschaften wie das Originalsystem hat. Das lineare Teilsystem bleibt bei dieser Prozedur erhalten.

Im nächsten Schritt wird dann ein Eingangsverlauf für die Zeitspanne  $t \in [0, \tau_2]$  entworfen, welcher das approximierte System unter bestimmten Startvoraussetzungen näher an die Zielruhelage bringt und gleichermaßen sicherstellt, dass zum Zeitpunkt  $\tau_2$  die Startvoraussetzungen wieder erfüllt sind. Dadurch wird eine wiederholte Anwendung des Eingangsverlaufes, jeweils mit angepassten Parametern, möglich.

Die angesprochenen Startvoraussetzungen bestehen dabei aus den fünf Forderungen

$${}^*x_1 = {}^d x_1, \quad (55a)$$

$${}^*x_2 = 0, \quad (55b)$$

$$\text{sign}{}^*x_4 = \text{sign}({}^d x_3 - {}^*x_3), \quad (55c)$$

$$\text{sign}{}^*x_4 = -\text{sign} \sin(2{}^*x_3) \quad (55d)$$

$$\text{int}\left(\frac{{}^*x_3}{\pi/2}\right) = \text{int}\left(\frac{{}^d x_3}{\pi/2}\right), \quad (55e)$$

wobei die letzte Bedingung mittels des Ganzzahl-Operators  $\text{int}(\cdot)$  ausdrückt, dass die Winkel  ${}^*q_2$  und  ${}^d q_2$  im selben Quadranten des Einheitskreises liegen. Es wird dann gezeigt, dass bei Erfüllung der ersten beiden Forderungen, unabhängig vom konkreten Eingangsverlauf, für die Änderung von  $x_3$  nach dem Ende des Manövers

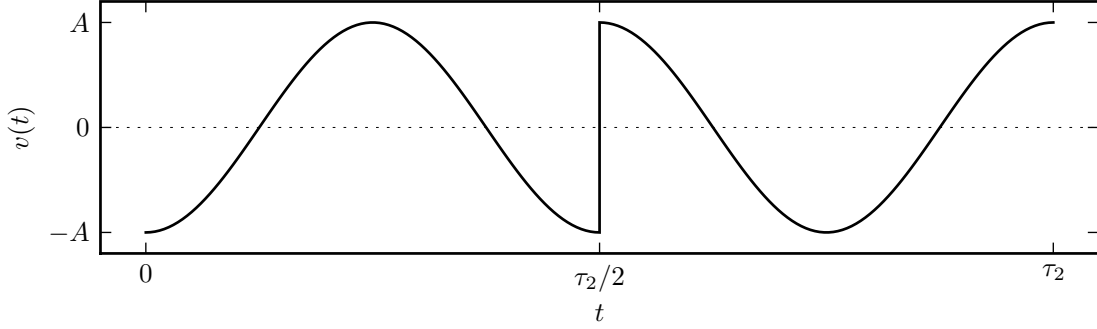
$$\Delta x_3 = {}^*x_4 \tau_2 \quad (56)$$

gilt, dass sich also die Änderung des Schulterwinkels aus dem Produkt des Anfangswertes der entsprechenden Winkelgeschwindigkeit und der Manöverdauer ergibt. Dies wiederum begründet die dritte Forderung, wonach sich der Unterarm am Anfang des Manövers auf seine Soll-Lage zubewegen muss.

Um dagegen  $\Delta x_4$  zu bestimmen, muss mehr über den Eingang bekannt sein. Es wird eine stückweise harmonische Funktion

$$v(t) = \begin{cases} -A \cos(4\pi \frac{t}{\tau_2}), & t \in [0, \frac{\tau_2}{2}) \\ A \cos(4\pi \frac{t}{\tau_2}), & t \in [\frac{\tau_2}{2}, \tau_2] \end{cases} \quad (57)$$

angesetzt, deren Verlauf in Abbildung 4 gezeigt ist. Durch diese Konstruktion wird erreicht, dass sowohl die Winkelgeschwindigkeit, als auch der Winkel des aktiven



**Abbildung 4:** Zeitverlauf des Eingangs für einen Iterationsschritt. Durch den sprunghaften Vorzeichenwechsel bei  $\tau_2/2$  wird eine spezielle Symmetrie erreicht, sodass die drei ersten bestimmten Integrale von 0 bis  $\tau_2$  über den Eingang verschwinden – eine Eigenschaft, welche die Beeinflussung von  $x_4$  vereinfacht.

Gelenks bei  $t = \tau_2$  die selben Werte annehmen wie bei  $t = 0$  und darüberhinaus auch

$$\int_0^{\tau_2} \int_0^t \int_0^{\tilde{t}} v(\tilde{t}) d\tilde{t} d\tilde{t} dt = 0 \quad (58)$$

gilt. Diese Eigenschaft wird benötigt, um mit Hilfe der approximierten Bewegungsgleichungen einen relativ einfachen Ausdruck für die Änderung der Ellenbogengeschwindigkeit während eines Teilmanövers zu erhalten:

$$\Delta x_4 = \frac{A^2 \tau_2^3 \eta^2}{64\pi^2} \sin(2^* x_3). \quad (59)$$

Nun wird auch die Startbedingung (55d) klar, denn das Vorzeichen der Änderung von  $x_4$  ist durch  $\sin(2^* x_3)$  festgelegt. Aus den Bedingungen (55c, 55d, 55e) folgt auch, dass eine Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\}$  nicht mittels der zyklischen Steuerung erreicht werden kann.

Als ein weiterer Schritt wird die Verringerung der Fehler mit jeder Iteration gefordert,

$$|{}^t x_3 - {}^d x_3| \leq \gamma_1 |{}^* x_3 - {}^d x_3|, \quad (60a)$$

$$|{}^t x_4 - {}^d x_4| \leq \gamma_2 |{}^* x_4 - {}^d x_4| \quad (60b)$$

wobei  $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < 1$  gelten muss. Dies kann auf verschiedene Arten erreicht werden. Für Simulations- und Experimentaluntersuchungen wird in [LMO00] eine konstante Manöverdauer  $\tau_2$  genutzt und die Amplitude für jeden Iterationsschritt zu

$$A = \frac{8\pi}{\eta\tau_2} \sqrt{\frac{(\gamma_2 - 1)^* x_2}{\tau_2 \sin 2^* x_3}} \quad \text{mit} \quad \gamma_2 = 1 - \frac{\tau_2^* x_4}{{}^d x_3 - {}^* x_3} < 1 \quad (61)$$



bestimmt, wodurch sich automatisch  $\gamma_1 = \gamma_2$  ergibt.

Die wiederholte Durchführung des Teilmanövers und die dadurch erreichte iterative Annäherung des Ellenbogenwinkels an seinen Sollwert wird in der Quelle als „Kontraktionsphase“ („contraction phase“) bezeichnet. Ihr vorgelagert ist eine „Ausrichtungsphase“ („alignment phase“), in der das aktive Gelenk auf seinen Sollwert gesteuert und dort angehalten wird. Wie dies im Einzelnen geschieht, ist für den Ansatz nicht relevant, solange es in einer endlichen Zeit  $\tau_1$  abläuft.

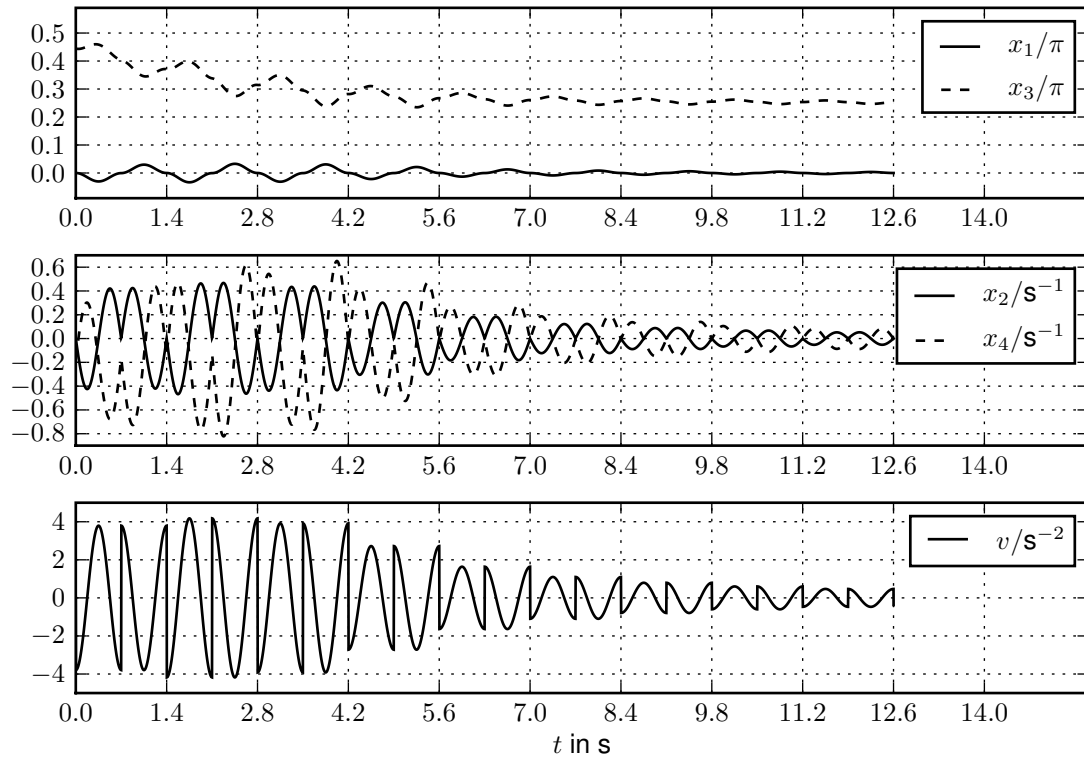
Abhängig von der Ausgangsruhelage, vom Verlauf der Ausrichtungsphase und von den geforderten Sollwinkeln, können die Bedingungen (55) am Ende der Ausrichtungsphase erfüllt sein oder nicht. Deshalb sieht das Regelgesetz eine optionale „Übergangsphase“ („transition phase“) vor. Mit dieser wird erreicht, dass der Wert von  $x_3$  in das benötigte Intervall fällt und dass  $x_4$  das richtige Vorzeichen hat. Ist die Vorzeichenbedingung bereits erfüllt, dann muss wegen  $x_4 = \text{const.}$ <sup>10</sup> nur abgewartet werden, bis  $x_3$  in das geforderte Intervall eintritt. Andernfalls besteht die in der Übergangsphase angewendete Strategie darin, zu warten, bis  $q_2$  in einen geeigneten Wert annimmt, dann ein Manöver mit dem Eingang aus Gleichung (57) und entsprechend gewählten Parametern durchzuführen, sodass die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{q}_2$  das Vorzeichen wechselt, und schließlich abermals zu warten bis die Kontraktionsphase beginnen kann.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Regelgesetz für die Kontraktionsphase implementiert und auf das Manipulatormodell mit  $\eta = 0.9$  angewendet. Abbildung 5 zeigt beispielhaft die Ergebnisse eines Simulationslaufes.

Aus Sicht des Autors der vorliegenden Arbeit, handelt es sich bei dem vorgestellten Konzept um einen innovativen und interessanten Ansatz. Eine offene Frage bleibt jedoch, ob nicht der recht hohe Steuerungsaufwand die in den Einleitungen der Referenzen [LMO97, LMO00] erwähnten Beweggründe für den Einsatz unteraktuierter Systeme, speziell die Verringerung von Kosten und Fehleranfälligkeit, relativiert.

---

<sup>10</sup>Diese Bedingung ergibt sich, wie in Abschnitt 2.5.2 gezeigt, bei der verwendeten partiellen Linearisierung für die Nulldynamik. Auf den Fall, dass  $x_4$  am Ende der Ausrichtungsphase sehr klein ist, oder gar verschwindet, wird nicht eingegangen.



**Abbildung 5:** Simulierte Zeitverläufe der Gelenkwinkel, der Winkelgeschwindigkeiten und des Eingangs während der Kontraktionsphase. Es gilt:  ${}^d x_1 = 0$ ,  ${}^d x_3 = \frac{1}{4}\pi$  und  $\tau_2 = 1.4$  s. Die wiederholte Durchführung des Manövers führt, wenn man als Betrachtungszeitpunkte positive ganzzahlige Vielfache der Manöverdauer  $\tau_2$  wählt, zur einer asymptotischen Annäherung des Ellenbogenwinkels  $x_3$  an seinen Sollwert während  $x_1$  auf seinem Sollwert verharrt.

### 3.3 Trajektorienbestimmung durch Optimierung

In diesem Abschnitt wird der in den Referenzen [SH00, SH01] vorgestellte und in [Sch06] ausführlich untersuchte Ansatz zur Ruhelagen-Überführung näher beleuchtet.

Das Modell wird dazu in einer partiell linearisierten Darstellung notiert die mit Beziehung (52) vergleichbar ist. Jedoch wird zusätzlich mittels eines Arcustangens-Terms trockene Reibung modelliert, womit man

$$\dot{x}_4 = -\eta \sin x_3 x_2^2 - (1 + \eta \cos x_3)v - \gamma_1 \arctan(\gamma_2 x_4) \quad (62)$$

erhält<sup>11</sup>. Dieses System wird dann zu diskreten Zeitpunkten betrachtet, die sich

<sup>11</sup>Eine entsprechend hohe Wahl von  $\gamma_2$  bewirkt, dass mit diesem Modell näherungsweise auch der Effekt der Haftreibung beschrieben werden kann.

aus den ganzzahligen Vielfachen der Zeitkonstante  $T_p$  ergeben. Für den Eingang setzt man die abschnittsweise konstante Funktion

$$v(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq 0, \\ \bar{v}_i, & \text{für } t \in (T_p(i-1), T_p], \text{ mit } i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ 0, & \text{für } t > mT_p \end{cases} \quad (63)$$

an, und legt fest, dass die Anzahl der Intervalle größer ist, als die Dimension des Zustandsraumes:

$$m > n = 4. \quad (64)$$

Der Endzustand  $\dagger \mathbf{x} = \mathbf{x}(mT_p)$  kann dann als Funktion des Eingangsvektors  $\mathbf{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)^T$  interpretiert werden:

$$\dagger \mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{v}), \quad (65)$$

wobei die Funktion  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowohl die Wirkung der Systemdynamik als auch des vorgegebenen Anfangszustandes beinhaltet.

Das Optimierungsproblem zur iterativen Bestimmung einer für das Erreichen der Zielruhelage  $\dagger \mathbf{x}$  geeigneten Eingangs-Sequenz  $\dagger \mathbf{v}$ , ausgehend von einem Startvektor  $\mathbf{v}^0$ , wird dann aus der folgenden Überlegung hergeleitet: In einem Iterationsschritt ergebe sich

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \delta \mathbf{v}^k, \quad (66)$$

sodass man in linearer Näherung

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}^{k+1}) = \mathbf{h}(\mathbf{v}^k + \delta \mathbf{v}^k) \approx \mathbf{h}(\mathbf{v}^k) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}}}_{=: \mathbf{S}^k} \delta \mathbf{v}^k \quad (67)$$

aufstellen kann, worin  $\mathbf{S}^k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  die Steuerbarkeitsmatrix im Schritt  $k$  darstellt. An dieser Stelle soll angemerkt sein, dass es nicht notwendig ist, die Funktion  $\mathbf{h}(\mathbf{v})$  zu bestimmen und die partiellen Ableitungen explizit auszuführen. Vielmehr kann  $\mathbf{S}^k$  durch numerische Integration berechnet werden, wie noch erläutert werden wird. Wenn für den Moment  $\mathbf{S}^k$  als bekannt angenommen wird, dann kann  $\delta \mathbf{v}^k$  aus dem Minimierungsproblem

$$\|\dagger \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{v}^k)}_{\dagger \mathbf{x}^k} - \mathbf{S}^k \delta \mathbf{v}^k\| \rightarrow \min_{\delta \mathbf{v}^k} \quad (68)$$

bestimmt werden, zu dessen Lösung der „Levenberg-Marquadt-Algorithmus“ herangezogen wird. Dafür muss die „regularisierte Pseudoinverse“ der Steuerbarkeitsmatrix

$${}^\times \mathbf{S} := \mathbf{S}^T (\bar{\mu}^2 \mathbf{I}_n + \mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1}, \quad (69)$$

bestimmt werden. In dieser Gleichung<sup>12</sup> sei der Parameter  $\bar{\mu}$  reell und  $\mathbf{I}_n$  bezeichne die  $n \times n$ -Einheitsmatrix. Nun kann mit

$$\delta \mathbf{v}^k = {}^* \mathbf{S}^k (\mathbf{d} \mathbf{x} - \mathbf{t} \mathbf{x}^k) \quad (70)$$

der im Schritt  $k$  optimale Wert für  $\delta \mathbf{v}^k$  berechnet werden. Ein nächster Iterationsschritt ist solange notwendig, bis  $\|\delta \mathbf{v}^k\|$  kleiner als eine akzeptable obere Schranke ist.

Nach der Erläuterung dieses Ansatzes ist die Bestimmung der Steuerbarkeitsmatrix mittels der Methode der „Empfindlichkeitsanalyse“<sup>13</sup> Gegenstand der Betrachtungen. Dazu wird bei festem  $k$  die Matrix  $\mathbf{S}$  als aus den  $m$  Spaltenvektoren  $\mathbf{s}^i$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  zusammengesetzt aufgefasst und jeder einzelne dieser Vektoren durch numerische Integration bestimmt. Bildet man nämlich  $\dot{\mathbf{s}}^i$  und vertauscht die Reihenfolge der Ableitungen,

$$\dot{\mathbf{s}}^i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial v_i} \mathbf{x} \right) = \frac{\partial}{\partial v_i} \dot{\mathbf{x}}. \quad (71)$$

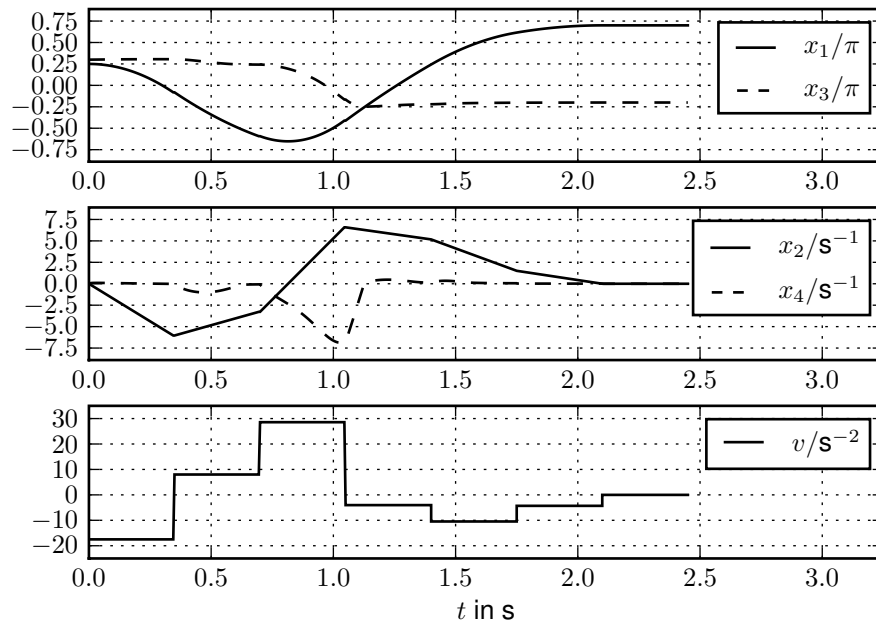
so erhält man  $m$  Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen der Dimension  $n$ , die sich parallel zu den Bewegungsgleichungen numerisch lösen lassen. Der gesamte Algorithmus kann mithin wie folgt zusammengefasst werden: Zu einer gegebenen Startruhelage  ${}^* \mathbf{x}$  und einem Startvektor  $\mathbf{v}^0$  für die Eingangs-Sequenz wird numerisch die Endruhelage  $\mathbf{t} \mathbf{x}^0$  und die Matrix  $\mathbf{S}^0$  bestimmt, und mittels der Beziehungen (70) und (66) die Eingangssequenz für den nächsten Iterationsschritt berechnet. Mit dieser Prozedur wird solange fortgefahren, bis  $\mathbf{t} \mathbf{x}^k$  „hinreichend nah“ am gewünschten Wert  $\mathbf{d} \mathbf{x}$  liegt und  $\|\delta \mathbf{v}^k\|$  somit entsprechend klein ist. Der Vektor  $\mathbf{v}^k$  kann dann als die gesuchte zielführende Eingangssequenz angesehen werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Herangehensweise implementiert und auf einige Eigenschaften hin untersucht. Zunächst kann festgehalten werden, dass für die in [SH01] angegebenen Parameterwerte gute Ergebnisse erzielt werden konnten. Exemplarisch wird dies in Abbildung 6 deutlich.

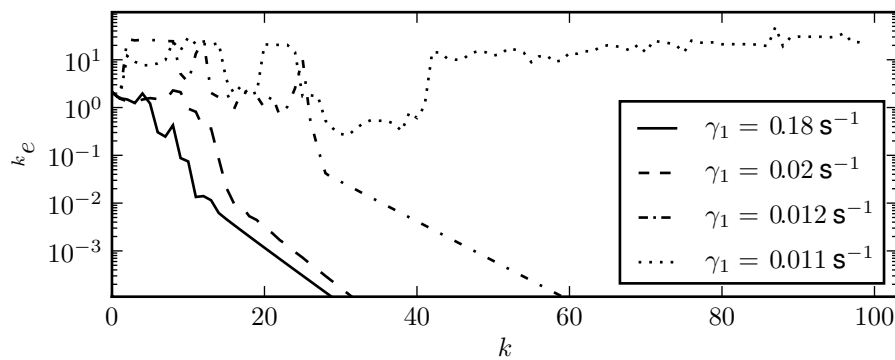
Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse muss jedoch beachtet werden, dass mit  $\gamma_1 = 0.18 \text{ s}^{-1}$  von relativ starker Haftreibung ausgegangen wird. Deshalb verwundert es auch nicht, dass sich annähernd ein solches Bewegungsmuster ergibt, wie es in Referenz [MRB06] explizit erzeugt wird, d. h. dass das Ellenbogengelenk zuerst seine Soll-Lage erreicht und diese bei der anschließenden Positionierung des Oberarms aufgrund der Reibung nicht mehr verlässt. Verringert man die Haftreibung im passiven Gelenk, konvergiert der Levenberg-Marquadt-Algorithmus ab einem

<sup>12</sup>Der rechte Kopfindex  $k$  wurde für eine bessere Übersichtlichkeit nicht mitgeschrieben.

<sup>13</sup>In Referenz [SH01] wird die Bezeichnung „Sensitivitätsanalyse“ verwendet.



**Abbildung 6:** Simulierte Verläufe der Zustandsgrößen und der Verlauf des Eingangs als Ergebnis der Optimierungsaufgabe. Verwendet wurde wie in [SH01]:  $\eta = 1.42$ ,  $\gamma_1 = 0.18 \text{ s}^{-1}$  und  $\gamma_2 = 20 \text{ s}$ . Weiterhin wurden  $m = 7$ ,  $T_p = 0.35 \text{ s}$  und  $\bar{\mu} = 0.003$  benutzt.



**Abbildung 7:** Konvergenz des Levenberg-Marquadt-Algorithmus für verschiedene Werte des Haftreibungsparameters  $\gamma_1$ . Für alle anderen Parameter gelten die Werte aus Abbildung 6. Auf der logarithmisch eingeteilten senkrechten Achse ist  $\|\mathbf{d}_k - \mathbf{x}^k\| =: k_e$  aufgetragen, auf der waagerechten Achse der Iterationsschritt  $k$ . Für  $\mathbf{v}^0$  wurde jeweils der Nullvektor verwendet. Mit  $\gamma_1 = 0.01 \text{ s}^{-1}$  oder kleiner konnte keine Konvergenz erreicht werden.

bestimmten Wert für  $\gamma_1$  schlechter, wie Abbildung 7 zu entnehmen ist. Für sehr schwache oder verschwindende Haftreibung konnte im Rahmen der vorliegenden Arbeit mit der in diesem Abschnitt beschriebenen Methode keine zufriedenstellende Trajektorie für den Arbeitspunktwechsel bestimmt werden. Es sei jedoch angemerkt, dass in Referenz [Sch06] die erfolgreiche Anwendung in Simulation und Experiment für sehr kleine Werte des Haftreibungsparameters berichtet wird. Im Unterschied zur hier untersuchten Variante wird darin eine Anpassung des Parameters  $\bar{\mu}$  während der Optimierung durchgeführt, jedoch nicht näher erläutert.

In [WSH04] wird auf eine Möglichkeit zur Vermeidung numerischer Schwierigkeiten eingegangen. Dabei wird die übliche Vorgehensweise, ausgehend vom Anfangswert in positive Zeitrichtung zu integrieren, ergänzt durch eine von der Zielruhelage ausgehende Integration in negative Zeitrichtung. Diese Herangehensweise wurde zwar in die Untersuchungen der in diesem Abschnitt vorgestellten Methode nicht einbezogen, jedoch wird sich in Kapitel 5 die u.a. dadurch inspirierte Umkehr der Integrationsrichtung als nützliches Hilfsmittel erweisen.

### 3.4 Trajektorienbestimmung durch Lösung einer Randwertaufgabe

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels soll noch eine weitere Möglichkeit betrachtet werden, Trajektorien für einen Arbeitspunktwechsel des unteraktuierten Manipulators zu bestimmen. Die Überführung des Systems von der Startruhelage in die Zielruhelage wird dabei als Zwei-Punkt-Randwertaufgabe mit freien Parametern aufgefasst. Diese Herangehensweise wurde in den Referenzen [GHZ05, GTZ05, GZ06] an verschiedenen Beispielsystemen erläutert und soll im folgenden auf in dieser Arbeit behandelte System angewendet werden.

Ausgangspunkt ist die kollokierte partielle Linearisierung des Modells, wie sie in Gleichung (52) vorliegt. Die Randbedingungen sind durch die als gegeben angenommen Ruhelagen am Anfang und am Ende,  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(0)$  und  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\tau)$ , festgelegt. Die Manöverdauer  $\tau$  ist dabei ein Verfahrensparameter und kann ebenfalls als gegeben vorausgesetzt werden. Ziel ist es nun,  $v(t)$  derart zu bestimmen, dass die resultierende Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  die Randbedingungen erfüllt. Weil der Eingang verschwinden muss, damit das System in einer Ruhelage verbleibt, ist automatisch bekannt, dass

$$v(t) \equiv 0 \text{ für } t \in \mathbb{R} \setminus [0, \tau] \quad (72)$$

gelten muss. Um das Finden eines geeigneten Eingangsverlaufes auf ein Problem endlicher Dimension zu reduzieren, wird für  $v(t)$  im Intervall  $[0, \tau]$  ein Ansatz gemacht, welcher  $N$  freie Parameter enthält.

Der Referenz [GTZ05] folgend, wird die Konstruktion

$$v(t) = \alpha(t) \text{ für } t \in [0, \tau] \text{ mit} \quad (73)$$

$$\alpha(t) := \sum_{k=1}^N a_k \underbrace{|t - c_k|^3}_{\theta_k(t)}, \quad c_k \in (0, \tau) \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (74)$$

benutzt, wobei die  $c_k$  verschieden von einander seien:

$$c_k = c_l \Rightarrow k = l \text{ für } k, l \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (75)$$

Gleichung (74) ist eine kompakte Darstellung für eine Abschnittsweise durch kubische Polynome beschriebene Funktion mit stetiger erster und zweiter Ableitung an den durch die Verfahrensparameter  $c_k$  festgelegten Übergangsstellen. Es handelt sich also um einen sogenannten Spline-Ansatz. Die Koeffizienten  $a_k$  bilden die freien Parameter des Ansatzes. Um die mindestens benötigte Anzahl  $N$  dieser freien Parameter zu bestimmen, muss die Anzahl der Bedingungen an die Bewegung ausgewertet werden: Für die vier Zustandsgrößen ergibt sich am Anfang und am Ende des Manövers je eine Randbedingung. Um diese erfüllen zu können, werden mindestens vier freie Parameter benötigt. Stellt man zusätzlich die Forderung nach Stetigkeit des Eingangssignals auf, ergibt sich je eine weitere Bedingung zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = \tau$ , sodass insgesamt  $N = 6$  gefolgert werden kann, wenn gleichzeitig ein unterbestimmtes Problem durch zu viele freie Parameter vermieden werden soll.

Die zwischen diesen sechs Parametern bestehenden Abhängigkeiten können zum Teil analytisch aufgelöst werden, sodass sich die Anzahl der numerisch zu bestimmenden Werte verringert. Damit das Eingangssignal, wie gefordert, keine Sprünge aufweist, muss

$$\alpha(0) = \alpha(\tau) = 0 \quad (76)$$

gelten. Schreibt man weiterhin die bestimmten Integrale der in Gleichung 74 eingeführten Funktionen  $\theta_k(t)$  als

$$\Theta_k := \int_0^\tau \theta_k(t) dt \quad \text{und} \quad (77a)$$

$$\hat{\Theta}_k := \int_0^\tau \int_0^{\tilde{t}} \theta_k(t) dt d\tilde{t}, \quad (77b)$$

so lässt sich wegen  $\sum_{k=1}^N a_k \Theta_k \stackrel{!}{=} d x_2 = 0$  und  $\sum_{k=1}^N a_k \hat{\Theta}_k \stackrel{!}{=} d x_1$  das lineare

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \theta_1(0) & \theta_2(0) & \dots & \theta_6(0) \\ \theta_1(\tau) & \theta_2(\tau) & \dots & \theta_6(\tau) \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \dots & \Theta_6 \\ \hat{\Theta}_1 & \hat{\Theta}_2 & \dots & \hat{\Theta}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^d x_1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

aufstellen. Mit einer einfachen Umformung gewinnt man daraus die Beziehung

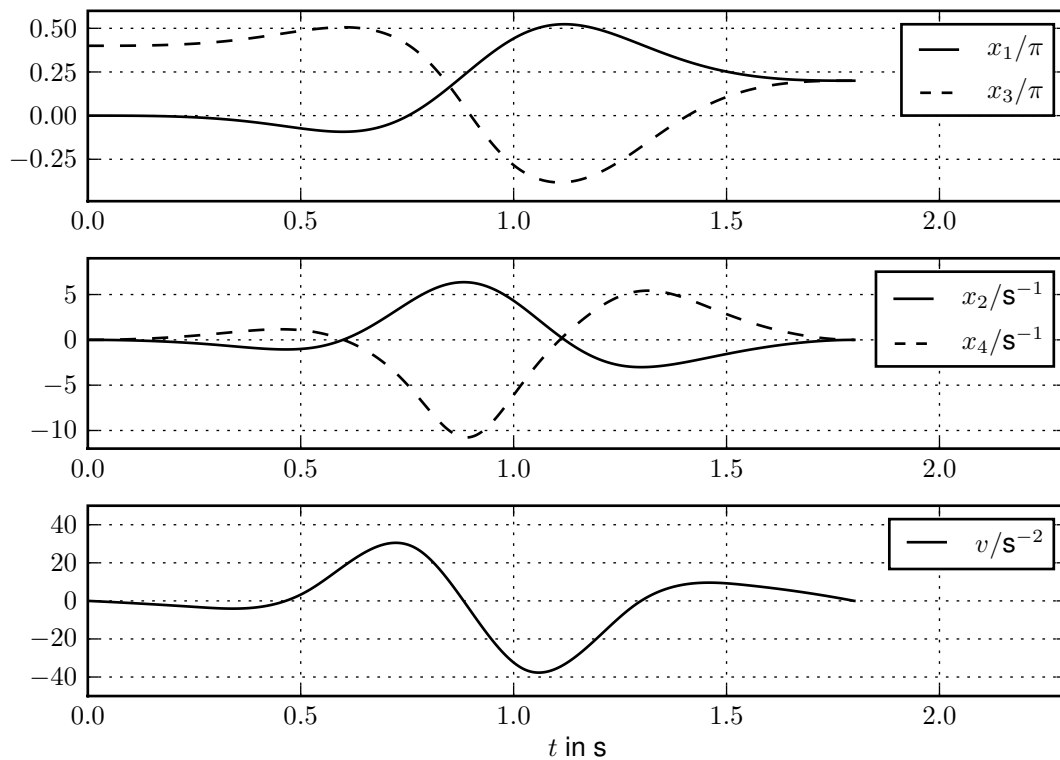
$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_3(0) & \theta_4(0) & \theta_5(0) & \theta_6(0) \\ \theta_3(\tau) & \theta_4(\tau) & \theta_5(\tau) & \theta_6(\tau) \\ \Theta_3 & \Theta_4 & \Theta_5 & \Theta_6 \\ \hat{\Theta}_3 & \hat{\Theta}_4 & \hat{\Theta}_5 & \hat{\Theta}_6 \end{pmatrix}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ {}^d x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_1(0) & \theta_2(0) \\ \theta_1(\tau) & \theta_2(\tau) \\ \Theta_1 & \Theta_2 \\ \hat{\Theta}_1 & \hat{\Theta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right), \quad (79)$$

die eine explizite Bestimmung von vier der sechs freien Parameter in Abhängigkeit von zwei verbleibenden Unbekannten ermöglicht. Vom numerischen Algorithmus zur Lösung der Randwertaufgabe müssen also lediglich  $a_1$  und  $a_2$  ermittelt werden.

Die numerische Lösung des Randwertproblems mit freien Parametern wurde in den oben angegebenen Referenzen mittels der MATLAB-Funktion `bvp4c` durchgeführt, welche auch im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurde. Dabei handelt es sich um ein sogenanntes Kollokationsverfahren [SKR00]. Da das linearisierte Teilsystem durch den Ansatz (78) seine Randbedingungen automatisch erfüllt, muss für die numerische Lösung nur das von  $x_3$  und  $x_4$  gebildete Teilsystem berücksichtigt werden. Als notwendigerweise anzugebende Start-Schätzung wurde eine lineare Interpolation zwischen den vorgegebenen Randwerten angesetzt, was im Fall von  $x_4$  die Nullfunktion bedeutet.

Ergebnis der Untersuchungen ist, dass stets eine Lösung ermittelt werden konnte. Dazu ist es allerdings notwendig dem Lösungsalgorithmus eine Funktion zur analytischen Berechnung der Jacobi-Matrix bereitzustellen. Andernfalls, d. h. wenn diese Matrix durch den Algorithmus mittels eines Differenzenverfahrens approximiert werden muss, kann es Kombinationen von Randwerten und Verfahrensparametern geben, in denen `bvp4c` den Lösungsvorgang abbricht. Auch mit der Bereitstellung der analytischen Jacobi-Matrix, haben die für  $\tau$  und  $c_1, \dots, c_N$  gewählten Werte, sehr großen Einfluss auf die Rechenzeit.





**Abbildung 8:** Mittels RWA-Ansatz bestimmte Lösung der Bewegungsgleichungen zur Überführung von  ${}^* \mathbf{x} = (0, 0, 0.4\pi, 0)^T$  nach  ${}^{\dagger} \mathbf{x} = (0.2\pi, 0, 0.2\pi, 0)^T$ . Die Manöverdauer wurde mit  $\tau = 1.8\text{ s}$  vorgegeben. Die Übergangsstellen wurden gleichmäßig verteilt im Intervall gewählt:  $c_k := \frac{k}{N+1}\tau$ .

Abbildung 8 zeigt exemplarisch den Verlauf der Zustandsgrößen für eine mit dem beschriebenen Ansatz erhaltene numerische Lösung der Bewegungsgleichungen zur Überführung von  ${}^* \mathbf{x} = (0, 0, 0.4\pi, 0)^T$  nach  ${}^{\dagger} \mathbf{x} = (0.2\pi, 0, 0.2\pi, 0)^T$ . Für den Trägheitsparameter des Modells wurde  $\eta = 0.9$  verwendet.

## 4 Analyse des Regelungssystems

### 4.1 Klassifizierung regelungstechnischer Problemstellungen

Wie sich in Abschnitt 3.1 gezeigt hat, ist die in der Literatur dominierende Regelungsaufgabe im Zusammenhang mit dem betrachteten Manipulatormodell, der Wechsel von einer vorgegebenen Ruhelage in eine andere. Hintergrund ist sicher, dass dies für vollständig aktuierte Manipulatoren eine Basisaufgabe ist, da in der Robotik sehr viele Anwendungen auf einem Positionswechsel des Endeffektors aufbauen. Für den unteraktuierten Manipulator stellt sie gewissermaßen eine Messlatte dar.

Neben dem Übergang von einer Ruhelage in eine andere kann man jedoch noch eine Reihe weiterer grundlegender regelungstechnischer Zielstellungen formulieren, welche unter Umständen einfacher zu erreichen sind. Ein solches Ziel lässt sich durch den Typ der Einschränkungen an die Komponenten des Anfangszustandes  $\mathbf{x}^*$  und des Endzustandes  $\mathbf{x}^{\dagger}$  beschreiben. Für jede der jeweils vier Komponenten kann man die folgenden Einschränkungen festlegen.

- **0**: Vorgabe des konkreten Wertes 0,
- **V**: Vorgabe eines beliebigen konkreten Wertes<sup>14</sup>,
- **I**: Vorgabe eines Intervalls,
- **F**: Frei, d. h. keine Vorgabe.

Als weitere Einschränkung werde gefordert, dass sowohl der Systemeingang, als auch alle Zustandsgrößen begrenzt bleiben. Eine Regelungsaufgabe kann nun formal als Zuordnung von zwei Vier-Tupeln dieser Einschränkungen aufgefasst werden. Damit lässt sich zum Beispiel der Wechsel von einer Ruhelage in eine andere durch den Aufgabentyp  $(F,0,F,0) \rightarrow (V,0,V,0)$  kennzeichnen. Die globale Stabilisierung einer Ruhelage wäre dann die Verallgemeinerung dieser Problemstellung zu  $(F,F,F,F) \rightarrow (V,0,V,0)$ .

Mit der Notation lassen sich auch Regelungsziele formulieren, deren Endzustand keine Ruhelage des Systems ist. Auch solche Zustände können interessant sein, beispielsweise als Zwischenschritt bei der Erfüllung einer übergeordneten Regelungsaufgabe. Tabelle 4 zeigt, welche Aufgaben die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Ansätze im Einzelnen behandeln und in welche Teilschritte das Gesamtproblem dafür ggf. untergliedert wird.

<sup>14</sup>Für die Geschwindigkeiten  $x_2$  und  $x_4$  werden hier Werte verschieden von 0 gefordert, um eine Abgrenzung der Ruhelagen von allgemeinen Systemzuständen zu erreichen.

Ansatz	Aufgabentyp
[AT91]	Phase 1: $(F,0,F,0) \rightarrow (F,F,V,0)$ ; Phase 2: $(F,F,V,0) \rightarrow (V,0,V,0)$
[ON91]	$(F,F,F,F) \rightarrow (V,0,F,0)$
[SKN96]	Phase 1: $(F,F,F,F) \rightarrow (V,0,F,F)$ ; Phase 2: $(V,0,F,F) \rightarrow (I,0,I,0)$
[BX96]	Phase 1: $(F,F,F,F) \rightarrow (F,F,V,0)$ ; Phase 2: $(F,F,V,0) \rightarrow (V,0,V,0)$
[LMO97]*	Phase 1: $(F,0,F,0) \rightarrow (V,0,F,F)$ ; Phase 2: $(V,0,F,F) \rightarrow (V,0,I,I)$ ; Phase 3: $(V,0,I,I) \rightarrow (V,0,V,0)$
[MBS98]#	Regler 1: $(F,F,F,F) \rightarrow (F,F,V,0)$ ; Regler 2: $(F,F,F,F) \rightarrow (V,0,V,0)$
[SH00]	$(F,0,F,0) \rightarrow (V,0,V,0)$
[MRB06]	Phase 1.1: $(F,0,F,0) \rightarrow (F,F,V,0)$ ; Phase 1.2: $(F,F,V,0) \rightarrow (F,0,V,0)$ ; Phase 2: $(F,0,V,0) \rightarrow (V,0,V,0)$

**Tabelle 4:** Zuordnung der Regelungsaufgaben zu den in Abschnitt 3.1 vorgestellten Ansätzen. Bemerkungen: \*: In Abschnitt 3.2 wurden die drei Phasen als, Ausrichtungs-Übergangs- und Kontraktionsphase bezeichnet. #: Zwischen beiden Reglern wird nach Bedarf umgeschaltet. Bei Regler 2 ist die Bremse aktiviert.

Nachdem diese Formalisierung von Regelungsaufgaben bzw. Klassen von Manövern eingeführt wurde, widmen sich die folgenden Unterabschnitte wieder direkt dem Regelungssystem um Eigenschaften und Zusammenhänge herauszuarbeiten, welche sich bei der Suche nach Ansätzen zur Lösung einiger der vorgestellten Aufgaben als nützlich erweisen könnten.

## 4.2 Erhaltungsgrößen

Zur Untersuchung mechanischer Systeme werden oft Erhaltungsgrößen herangezogen. Das sind Größen die von den sich zeitlich ändernden Komponenten des Systemzustands funktionell abhängen, dabei aber mit fortschreitender Zeit selbst konstant bleiben und mithin nur von den Anfangsbedingungen festgelegt werden [Nol04, Abschnitt 1.4]. Aus physikalischer Sicht wird ihre Existenz durch Erhaltungssätze begründet, wobei der Energie- und der Impuls bzw. Drehimpulserhaltungssatz hierfür Standardbeispiele sind.

Aus mathematischer Sicht ist eine Erhaltungsgröße ein sogenanntes *erstes Integral*. Eine derartige Größe wird als differenzierbare Funktion des Systemzustands, welche entlang einer jeden Lösung konstant ist, definiert [Arn01, Abschnitt 7.6]. Deshalb gehört jede Lösung der System-DGL zu einer einzigen Niveaumenge dieser Funktion. Gelingt es, derartige Größen zu finden, erleichtern sie Verständnis der Systemdynamik deutlich. Für allgemeine Differentialgleichungssysteme ist die Existenz von ersten Integralen jedoch keineswegs gesichert, wenn man von kon-

stanten und damit trivialen Fällen absieht.

Es liegt auf der Hand, dass das Konzept der Erhaltungsgrößen bei Systemen, die von außen beeinflusst werden, nur dann Sinn ergibt, wenn das Eingangssignal entweder bekannt ist oder sich aus den Zustandsgrößen ergibt. Somit kann man das System als trotzdem *autonom* auffassen.

Wir wollen nun konkret Größen suchen, die erhalten bleiben, wenn der Systemeingang identisch verschwindet. Es ist klar, dass die Definition des Eingangs einen erheblichen Einfluss auf die Natur dieser ersten Integrale hat. Ausgehend vom ursprünglichen Modell (18), in dem der Systemeingang  $u$  durch das Drehmoment im Schultergelenk gebildet wurde, haben wir durch die Gleichungssysteme (52) und (37) zwei andere mathematische Beschreibungen des Manipulators eingeführt. In diesen Modellen wird die Winkelbeschleunigung des Schulter- bzw. des Ellenbogengelenks als Eingangsgröße  $v$  bzw.  $v_2$  aufgefasst. Im Folgenden werden für jede dieser drei Darstellungen Erhaltungsgrößen gesucht.

#### 4.2.1 Eingang: Schultermoment $u$

Wird das Schulterdrehmoment mit  $u \equiv 0$  vorgegeben, so liegt im physikalischen Sinne ein abgeschlossenes System vor. Für dieses gelten die Erhaltungssätze für Energie  $H$  und Drehimpuls  $p_1$ . Um dies auch an unserem konkreten Modell zu erkennen, betrachten wir diese beiden Größen näher:

$$H = T = \frac{1}{2}(M_1\dot{q}_1^2 + M_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2M_3 \cos q_2 \dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)), \quad (80)$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = (M_1 + M_2)\dot{q}_1 + M_2\dot{q}_2 + M_3 \cos q_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad (81)$$

Bei der HAMILTONSchen Formulierung der Bewegungsgleichung in Abschnitt 2.3 haben wir in Gleichung (23) gesehen, dass die Zeitableitung des Impulses  $p_1$  gerade das Eingangsdrehmoment  $u$  ist. Mithin ist  $p_1$  bei verschwindendem Eingang eine Erhaltungsgröße.

Die Zeitableitung der Energie zu bestimmen, ist im Vergleich dazu aufwendiger, auch wenn wir dabei letztlich einen überschaubaren und aussagekräftigen Term erhalten. Zunächst schreiben wir die Energie, unter Nutzung der Beziehung (22) in einer gemischten Darstellung an, welche die verallgemeinerten Geschwindigkeiten *und* die verallgemeinerten Impulse enthält:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p}, \quad (82)$$

Dies erspart uns im folgenden Schritt die direkte Zeitableitung der Massenmatrix, denn wir erhalten

$$\dot{T} = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 p_1 + \dot{q}_1 \dot{p}_1 + \ddot{q}_1 p_2 + \dot{q}_2 \dot{p}_2). \quad (83)$$

In diesem Ausdruck werden wir die Impulse und ihre Ableitungen nun wieder schrittweise eliminieren. Wir beginnen mit dem letzten Summanden und erinnern uns der kanonischen Gleichung (20b), und der Übereinstimmung von  $H$  und  $T$ :

$$\dot{q}_2 \dot{p}_2 = \dot{q}_2 \left( -\frac{\partial H}{\partial q_2} \right) = \dot{q}_2 \left( -\frac{\partial T}{\partial q_2} \right) = M_3 \sin q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \dot{q}_2. \quad (84)$$

Nun wenden wir uns dem ersten und dritten Summanden zu. Gleichung (21) kann genutzt werden, um die Impulse zu ersetzen und die Bewegungsgleichung (15), um die Winkelbeschleunigungen zu substituieren. Dann bietet sich ein Übergang in der Notation zu den Zustandsgrößen an, um mittels  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  und Gleichung (14) zu folgern:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 p_1 + \ddot{q}_2 p_2 &= (\dot{x}_2, \dot{x}_4) \mathbf{p} = (\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{x})))^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= x_2 u - (C_1(\mathbf{x})x_2 + C_2(\mathbf{x})x_4) \\ &= x_2 u - M_3 \sin x_3 (x_2^2 + x_2 x_4) x_4. \end{aligned} \quad (85)$$

Nun ist das Ergebnis offensichtlich, denn  $\dot{p}_1 = u$  hatten wir oben bereits erkannt. Für die zeitliche Änderung der Energie gilt also

$$\dot{T} = \frac{1}{2} (x_2 u - M_3 \sin x_3 (x_2^2 + x_2 x_4) x_4 + x_2 u + M_3 \sin x_3 (x_2^2 + x_2 x_4) x_4) = x_2 u. \quad (86)$$

Dieses Ergebnis entspricht der Erwartung, denn das Produkt aus Drehmoment und Drehzahl im Oberarm ist gerade die mechanische *Leistung*, welche vom Antrieb an das System übertragen wird. Dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, wenn das Moment und mit ihm die zugeführte Leistung gleich null wird, ist nunmehr eine triviale Feststellung.

An dem Ausdruck lässt sich noch eine weitere Eigenschaft des Systems ablesen: Gilt  $x_2 = 0$ , dann kann die Energie des Systems nicht beeinflusst werden. Insbesondere ist dies wichtig, wenn der Manipulator in eine Ruhelage gesteuert werden soll. Dann nämlich muss ihm alle Energie entzogen werden, was aber nur gelingt, solange  $x_2 \neq 0$  ist.

#### 4.2.2 Eingang: Schulterbeschleunigung $v$

Wir betrachten nun das partiell linearisierte System aus dem Fall a) bei welchem wir durch die Zustandsrückführung (50) einen neuen Eingang  $v$  so eingeführt hatten, dass er genau der Winkelbeschleunigung im Oberarm entspricht. Durch diese Rückführung gilt aber im Allgemeinen bei verschwindendem  $v$  nicht, dass  $u$  ebenfalls verschwindet. Die physikalisch motivierten Erhaltungsgrößen Drehimpuls und Energie, sind also unter der Bedingung  $v \equiv 0$  keine mehr. Stattdessen werden wir

zwei andere angeben können. Ein sehr einfach zu erkennendes erstes Integral ist die Oberarmgeschwindigkeit  $x_2$ . Sie bleibt konstant, wenn die zugehörige Beschleunigung identisch verschwindet. Eine zweiten Erhaltungsgröße lässt sich durch die Betrachtung des verbleibenden Systems finden. Bei  $v = 0$  vereinfacht sich die interne Dynamik zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ -\eta \sin x_3 \, {}^0x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

Schreiben wir diese Beziehung als DGL zweiter Ordnung in eine Zeile,

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = -\eta \, {}^0x_2^2 \sin x_3, \quad (88)$$

dann erkennen wir die Bewegungsgleichung des ebenen mathematischen Pendels. Wenn der Oberarm mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, verhält sich der Unterarm in einem sich mit  $x_1$  drehenden Koordinatensystem offensichtlich wie ein ebenes Pendel unter dem Einfluss der Gravitation.

Das Pendel ist in der Literatur ein gern aufgegriffenes Beispiel für ein nichtlineares dynamisches System<sup>15</sup>. Nicht zuletzt wird es deshalb gern untersucht, weil, zumindest im reibungsfreien Fall, ein einfaches erstes Integral existiert: die Summe aus potentieller und kinetischer Energie der pendelnden Masse. Wir können deshalb eine zu dieser Energie analoge Größe, die wir  $\tilde{V}$  nennen, konstruieren,

$$\tilde{V} := \frac{1}{2}x_4^2 + \eta \, {}^0x_2^2(1 - \cos x_3), \quad (89)$$

und uns von ihrer zeitlichen Invarianz überzeugen:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_4} (-\eta \sin x_3 \, {}^0x_2^2) \\ &= (\eta \sin x_3 \, {}^0x_2^2) x_4 + x_4 (-\eta \sin x_3 \, {}^0x_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

Diese Analogie zum ebenen Pendel wird in Kapitel 5 zum besseren Verständnis des Systemverhaltens beitragen.

### 4.2.3 Eingang: Ellenbogenbeschleunigung $v_2$

Nun wenden wir uns noch der in Abschnitt 2.5.1 untersuchten nicht-kollokierten Linearisierung zu. Bei dieser wurde der neue Eingang  $v_2$  so eingeführt, dass er

<sup>15</sup> Tatsächlich ist das Phasenporträt des Pendels auf den Umschlagseiten der beiden in dieser Arbeit referenzierten Werke über gewöhnliche Differentialgleichungen, [Arn01, Aul04], abgebildet, was für die Bedeutung dieses Systems spricht.

gerade der Winkelbeschleunigung im Ellenbogengelenk,  $\dot{x}_4$ , entspricht. Die dafür notwendige Rückführung (35) verhindert abermals die Gültigkeit der Energie- und Drehimpulserhaltung. Andererseits liegt mit  $x_4$  ein erstes Integral wieder auf der Hand.

Für die verbleibende Dynamik haben wir im genannten Abschnitt mit Gleichung (45) bereits eine explizite Lösung hergeleitet. Diese kann umgeformt werden, sodass man daraus ein zeitabhängiges erstes Integral erhält [Arn01, Abschnitt 2.7.7]. Neue Erkenntnisse lassen sich daraus jedoch nicht gewinnen, da wir die Lösung der DGL bereits kennen.

### 4.3 Symmetrie

In diesem Abschnitt werden die Symmetrie-Eigenschaften der Bewegungsgleichungen untersucht und die sich daraus ergebenden Konsequenzen aufgezeigt. Das nach Variante a) partiell linearisierte Modell (52)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ -\eta \sin x_3 x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -(1 + \eta \cos x_3) \end{pmatrix} v =: \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})v$$

weist eine Symmetrie auf:

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (91a)$$

$$\mathbf{g}(-\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (91b)$$

Damit lässt sich zeigen, dass folgende Aussage gilt: Wenn für  $t \in [0, \tau]$  der Eingangsverlauf  $v(t)$  den Zustand  ${}^*\mathbf{x} := \mathbf{x}(0)$  in den Zustand  ${}^\dagger\mathbf{x} := \mathbf{x}(\tau)$  überführt, dann wird der Zustand  $-{}^*\mathbf{x}$  durch den Verlauf  $\tilde{v}(t) := -v(t)$  in den Zustand  $-{}^\dagger\mathbf{x}$  überführt. Es gilt also zu zeigen, dass der Ansatz

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) := -\mathbf{x}(t), \quad (92a)$$

$$\tilde{v}(t) := -v(t) \quad (92b)$$

den Systemdifferentialgleichungen genügt.

Leitet man diesen Ansatz nach der Zeit ab, erhält man:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = -\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))v(t) = \mathbf{f}(-\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(-\mathbf{x}(t))(-v(t)), \quad (93)$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie (91) von  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  ausgenutzt haben. Nun können wir mit dem Ansatz (92)  $\tilde{\mathbf{x}}$  und  $\tilde{v}$  auch auf der rechten Seite einsetzen und erhalten

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{\mathbf{f}(-\mathbf{x}(t))}_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} + \underbrace{\mathbf{g}(-\mathbf{x}(t))}_{\tilde{\mathbf{x}}(t)} \underbrace{(-v(t))}_{\tilde{v}(t)} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}(t))\tilde{v}(t), \quad (94)$$

also nichts anderes als die Systemdifferentialgleichungen, womit die Gültigkeit der Behauptung gezeigt ist.

Darüber hinaus weist das Modell (52) noch eine weitere Symmetrie auf. Um diese geeignet formulieren zu können, führen wir den Vorzeichen-Operator  $\bar{\mathbf{I}}_{ij} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  ein, dessen Anwendung auf einen Vektor bewirkt, dass dessen  $i$ -te und  $j$ -te Komponente das Vorzeichen wechselt. In Matrixschreibweise gilt also speziell

$$\bar{\mathbf{I}}_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Damit lässt sich die zweite Symmetrie einfach notieren:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}) = -\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (96a)$$

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (96b)$$

Auf dieser Basis können wir nun eine weitere interessante Eigenschaft formulieren, die sich in der folgenden Behauptung niederschlägt: Wenn für  $t \in [0, \tau]$  der Eingangsverlauf  $v(t)$  den Zustand  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(0)$  in den Zustand  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(\tau)$  überführt, dann wird der Zustand  $\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}$  durch den Verlauf  $\tilde{v}(t) := -v(\tau - t)$  in den Zustand  $\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}$  überführt.

Um dies zu zeigen, gehen wir vom Ansatz

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) := \bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}(\tau - t) \quad (97a)$$

$$\tilde{v}(t) := -v(\tau - t) \quad (97b)$$

aus, den wir zunächst wieder nach der Zeit ableiten:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = -\bar{\mathbf{I}}_{13}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau - t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau - t))v(\tau - t)). \quad (98)$$

Nun können wir die Symmetrie nutzen, um den Vorzeichenoperator in das Argument von  $\mathbf{f}$  hineinzuziehen. Die Anwendung von  $\bar{\mathbf{I}}_{13}$  auf  $\mathbf{g}$  bleibt ohne Wirkung, da bei dieser Funktion nur die zweite und vierte Komponente von Null verschieden ist. Wir führen die Überlegung weiter und erhalten mit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{f}(\underbrace{\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}(\tau - t)}_{\tilde{\mathbf{x}}(t)}) + \mathbf{g}(\underbrace{\bar{\mathbf{I}}_{13}\mathbf{x}(\tau - t)}_{\tilde{\mathbf{x}}(t)})\underbrace{(-v(\tau - t))}_{\tilde{v}(t)} \\ &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}(t))\tilde{v}(t) \end{aligned} \quad (99)$$

die Systemdifferentialgleichungen, was die Richtigkeit der Behauptung belegt.



Die durch die Beziehung (97) gegebene Tatsache, lässt sich verbal in etwa durch „Umkehrung der Zeitrichtung entspricht Umkehrung der Vorzeichen der Gelenkwinkel und der Oberarmbeschleunigung.“ wiedergeben.

Diese beiden Eigenschaften für die Übertragbarkeit von Lösungen werden im Abschnitt 5.2 noch weiter spezialisiert und dem dort behandelten Teilsystem angepasst. Dadurch wird es möglich sein die Planung der Ruhelagenüberführung deutlich zu vereinfachen.

## 4.4 Phasenebene und Zustandstransformation

In diesem Abschnitt wird die Dynamik des Manipulatormodells auf Basis der partiell linearisierten Darstellung (52) zunächst in der von den Zustandsgrößen  $x_2$  und  $x_4$ , aufgespannten Ebene diskutiert. Darauf aufbauend wird eine Zustandstransformation in Normalform durchgeführt und die sich daraus ergebenden Konsequenzen analysiert.

### 4.4.1 Projektion in die $x_2$ - $x_4$ -Ebene

Der Koordinatenursprung der  $x_2$ - $x_4$ -Ebene stellt offensichtlich die mit  ${}^e\mathcal{X}$  bezeichnete Menge aller Ruhelagen dar, da in ihm beide Winkelgeschwindigkeiten verschwinden. Nach Gleichung (52) ergibt sich speziell für  $x_2$  und  $x_4$  die folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\eta \sin x_3 x_2^2 \end{pmatrix}}_{=:(0, d(x_2, x_3))^T =: \mathbf{d}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -(1 + \eta \cos x_3) \end{pmatrix}}_{=:(1, \kappa(x_3))^T =: \mathbf{g}_{24}(\mathbf{x})} v = \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{24}(\mathbf{x})v \quad (100)$$

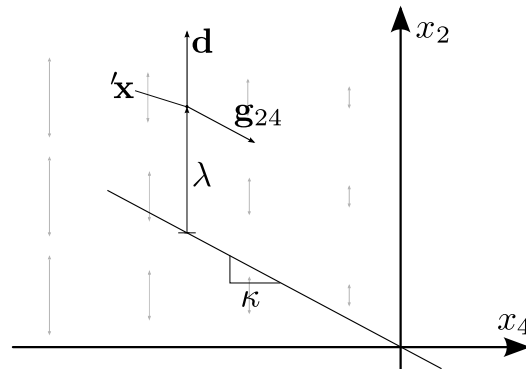
$$\text{mit } d(x_2, x_3) := -\eta \sin x_3 x_2^2 \text{ und } \kappa(x_3) := -(1 + \eta \cos x_3). \quad (101)$$

Der Vektor  $\mathbf{d}$  bzw. dessen Komponente  $d$  kann nach Referenz [LMO97] auch als „Drift“ bezeichnet werden. Den eingangsabhängigen Teil der Dynamik bildet der Vektor  $\mathbf{g}_{24}v$ . In dieser Darstellung erkennt man insbesondere, dass durch den Eingang beide Winkelbeschleunigungen in einem Verhältnis beeinflusst werden, welches durch  $\kappa$  gegeben ist. Eine durch

$$x_4 = \kappa(x_3)x_2 = -(1 + \eta \cos x_3)x_2 \quad (102)$$

gegebene Gerade lässt sich vor diesem Hintergrund als „Eingangs-Wirkungs-Gerade“ bezeichnen. Diese Gerade verläuft durch den Ursprung der  $x_2$ - $x_4$ -Ebene und hat die Eigenschaft, dass der Vektor  $\mathbf{g}_{24}$ , der die Wirkungsrichtung des Eingangs festlegt, stets parallel zu ihr liegt.

Da auf der gesamten  $x_4$ -Achse  $d(x_3, x_2) = 0$  gilt, ist es ausgeschlossen, dass das System allein durch die Wirkung der Drift eine Ruhelage erreicht. Da ferner der Betrag von  $d$  überall in der Nähe des Ursprungs sehr klein ist, spielt die Eingangs-Wirkungs-Gerade beim Abbremsen des Manipulators in eine Ruhelage eine besondere Rolle. In Abbildung 9 sind die beschriebenen Zusammenhänge für einen bestimmten Zustand  $\mathbf{x}$  dargestellt.



**Abbildung 9:** Lage der „Eingangs-Wirkungs-Gerade“ mit dem Anstieg  $\kappa = -(1 + \eta \cos x_3)$  in der  $x_2$ - $x_4$ -Ebene. Die Wirkungsrichtung des Eingangs verläuft parallel zu ihr. Die  $x_4$ -Komponente des Abstandes vom aktuellen Zustand  $\mathbf{x}$  zu dieser Geraden sei mit  $\lambda$  bezeichnet. Die Wirkungsrichtung und die  $x_2$ -abhängige Intensität des Driftvektors  $\mathbf{d}$  wird durch die grauen Doppelpfeile angedeutet.

Der Anstieg  $\kappa$  der Eingangs-Wirkungs-Geraden ändert sich nach Gleichung (102) offensichtlich mit  $x_3$ , was die Beschreibung einer Trajektorie in den Ursprung schwierig macht. Dieses Problem wird im Folgenden angegangen.

#### 4.4.2 Zustandstransformation in Byrnes-Isidori-Normalform

Der Nachteil an der bisher betrachteten Systemdarstellung ist, dass der Eingang  $v$  im linearisierten Teilsystem *und* im verbleibenden Teilsystem auftritt. Dies kann umgangen werden, wenn statt der Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit  $x_4$  eine andere Zustandsgröße betrachtet wird, deren Zeitableitung unabhängig von  $v$  ist, wenn also eine Beschreibung in Normalform vorliegt. Die in Abbildung 9 eingeführte  $x_4$ -Komponente des Abstandes von der Eingangs-Wirkungs-Geraden, welche mit  $\lambda$  bezeichnet wurde, erfüllt die notwendigen Anforderungen: Diese Größe kann durch die Beziehung

$$\lambda := x_4 - \kappa x_2 = x_4 + (1 + \eta \cos x_3)x_2 \quad (103)$$

ausgedrückt werden, die sich bezüglich  $x_4$  stets eindeutig umkehren lässt:

$$x_4 = \lambda - (1 + \eta \cos x_3)x_2. \quad (104)$$

Außerdem ist ihre Zeitableitung unabhängig von  $v$ :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{x}_4 - \eta x_2 x_4 \sin x_3 + (1 + \eta \cos x_3)v \\ &= -\eta x_2^2 \sin x_3 - (1 + \eta \cos x_3)v - \eta x_2 x_4 \sin x_3 + (1 + \eta \cos x_3)v \\ &= -\eta x_2(x_2 + x_4) \sin x_3 \\ &= -\eta x_2 \sin x_3(\lambda - \eta x_2 \cos x_3). \end{aligned} \quad (105)$$

Ersetzt man in den partiell linearisierten Bewegungsgleichungen (52)  $x_4$  und  $\dot{x}_4$  durch die in den Gleichungen (104) und (105) gegebenen Zusammenhänge, resultiert daraus die Normalform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ \lambda - (1 + \eta \cos x_3)x_2 \\ -\eta x_2 \sin x_3(\lambda - \eta x_2 \cos x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v. \quad (106)$$

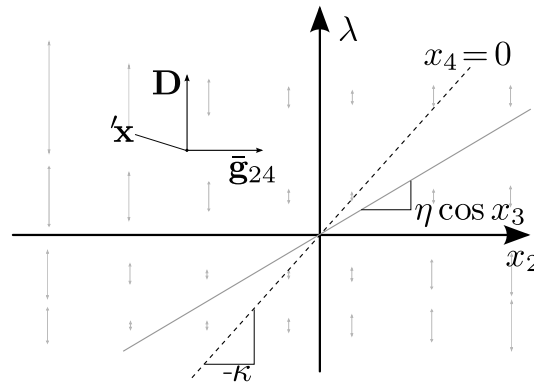
In Referenz [Olf01] wird ausführlich auf Normalformen unteraktuierter Systeme eingegangen. Nach der dort vorgenommenen Einteilung handelt es sich bei (106) um eine spezielle Byrnes-Isidori-Normalform, die als „Nicht-Dreiecksnormalform“ („nontriangular normal form“) bezeichnet wird. Unter bestimmten Voraussetzungen wird in der Quelle basierend auf der Normalform ein Reglerentwurf mittels der „Backstepping“-Methode durchgeführt. Jedoch gelten die dafür notwendigen Annahmen für das hier betrachtete System nicht.

Für eine einfachere Notation werden ein neuer Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  und ein neuer Drift-Term  $D$  wie folgt eingeführt:

$$\mathbf{z} := (x_1, x_2, x_3, \lambda)^T \in \mathbb{R}^4, \quad (107)$$

$$D(\mathbf{z}) := \dot{\lambda} = -\eta x_2 \sin x_3(\lambda - \eta x_2 \cos x_3). \quad (108)$$

Im Folgenden wird die Systemdynamik ausführlich in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene betrachtet. Die Vorteile dieser Darstellung liegen auf der Hand: Die Wirkungsrichtung des Eingangs ändert sich nun nicht mehr, sondern ist für alle Konfigurationen die Horizontale. Somit fällt die Eingangs-Wirkungs-Gerade immer mit der  $x_2$ -Achse zusammen. Andererseits weist das System auch in transformierten Koordinaten in  $x_2$ -Richtung keine Drift auf. Die Wirkung des Eingangs und der Drift, sind mithin orthogonal, was das Verständnis der Bewegungen erleichtert. Da bei  $x_2 = 0$  stets  $\lambda = x_4$  gilt, liegen auch in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene alle Ruhelagen im Koordinatenursprung. Abbildung 10 stellt die Überlegungen graphisch dar.



**Abbildung 10:** Systemdynamik in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. Die Eingangs-Wirkungs-Gerade ist durch  $\lambda = 0$  gegeben und liegt somit auf der Abszisse. Der Driftvektor  $\mathbf{D} := (0, D(\mathbf{z}))^T$  ist zustandsabhängig, liegt aber immer parallel zur  $\lambda$ -Achse. Weiterhin gilt  $\bar{\mathbf{g}}_{24} := (1, 0)^T$ . Die graue Linie stellt die „Nulldriftgerade“ dar; auf ihr gilt  $D = 0$ . Die strichlierte Linie markiert die Gerade, auf der  $x_4 = 0$  gilt.

#### 4.4.3 Sektoranalyse in der $x_2$ - $\lambda$ -Ebene

Im Folgenden soll durch die Betrachtung des Vorzeichens von  $D(\mathbf{z})$  die  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene in verschiedene Zonen aufgeteilt werden. Dies wird es uns in Abschnitt 5 ermöglichen potentielle Lösungsansätze strukturiert zu diskutieren.

Aus Gleichung (108) kann man leicht

$$\text{sign}(D(\mathbf{z})) = -\text{sign}(x_2)\text{sign}(\sin x_3)\text{sign}((\lambda - \eta x_2 \cos x_3)) \quad (109)$$

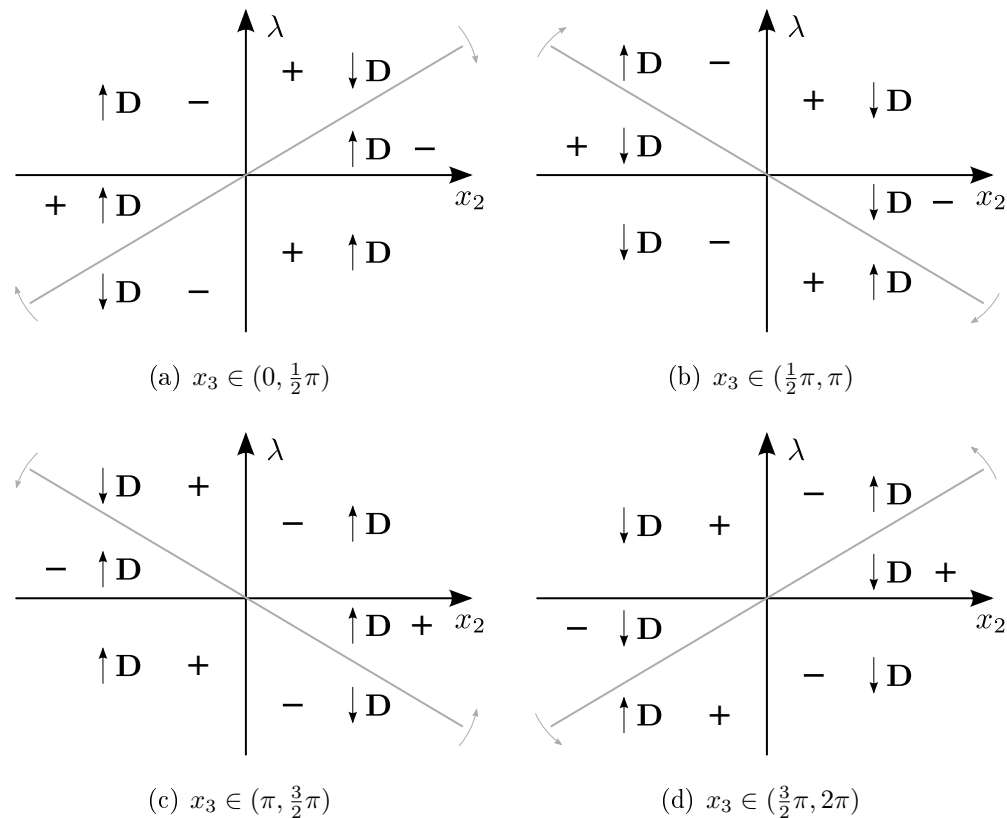
ablesen und damit die  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene je nach Vorzeichen von  $D$  in Sektoren aufteilen. Für festes  $x_3$  bilden dabei die  $\lambda$ -Achse sowie die Gerade  $\lambda = \eta \cos x_3 x_2$  die Grenzen dieser Sektoren. Für letztere bietet sich die Bezeichnung „Nulldriftgerade“ an, weil auf ihr  $D = 0$  gilt.

Um die Systemdynamik weiter zu untersuchen, führen wir die Hilfsgröße

$$\sigma(\mathbf{z}) := -\text{sign}(\lambda)\text{sign}(D(\mathbf{z})) \quad (110)$$

ein. Somit lässt sich der Fall, dass das System sich in Richtung der Eingangs-Wirkungs-Gerade bewegt durch  $\sigma = +1$  kennzeichnen, und der entgegengesetzte Fall entsprechend durch  $\sigma = -1$ . Betrachtet man nun den Wert von  $\sigma(\mathbf{z})$  als ausschlaggebend für die Festlegung der Sektoren, dann nimmt die  $x_2$ -Achse die Rolle einer weiteren Sektorgrenze zusätzlich zu den oben bereits identifizierten ein.

Für jedes  $x_3$ , mit Ausnahme ganzzahliger Vielfacher von  $\frac{\pi}{2}$  gibt es damit sechs Sektoren, die sich auf die vier Quadranten aufteilen, wobei zwei von ihnen jeweils



**Abbildung 11:** Einteilung der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene in sechs Sektoren je nach der durch  $\sigma$  ausgedrückten Drift-Eigenschaft bezüglich der auf der  $x_2$ -Achse liegenden Eingangs-Wirkungs-Geraden. In den drei Sektoren mit eingezeichnetem „+“-Symbol wirkt die Drift in Richtung dieser Geraden, in jenen mit „-“ entsprechend andersherum. Die Sektorgrenzen werden von der  $x_2$ - und der  $\lambda$ -Achse sowie von der jeweils grau eingezeichneten Nulldriftgeraden gebildet. Der Anstieg dieser Geraden ändert sich nach Abbildung 10 mit  $x_3$ . Die grauen Pfeile deuten die Richtung dieser Änderung für wachsende  $x_3$  an.

einen ganzen Quadranten einnehmen. Aus Abbildung 11 geht die Unterteilung der Ebene in Abhängigkeit von  $x_3$  hervor. Qualitativ bleibt diese Aufteilung unverändert, wenn  $x_3$  variiert wird, ohne dabei die angegebenen Intervalle zu verlassen. Für  $x_3 = \frac{1}{2}\pi$  und  $x_3 = \frac{3}{2}\pi$  liegt die Nulldriftgerade auf der  $x_2$ -Achse, sodass es dann nur vier Sektoren gibt. Für  $x_3 = 0$  und  $x_3 = \pi$  verschwindet  $D$  überall in der Ebene, sodass dann auch  $\sigma = 0$  gilt, und eine Aufteilung in Sektoren unmöglich macht. Bei der qualitativen Diskussion der Bewegungsabläufe im folgenden Kapitel treten diese kritischen Werte wieder auf. Wie sich zeigen wird, kann mit dem vorgestellten Ansatz keine Ruhelage erreicht werden, für die der Wert des Ellenbogenwinkels ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{\pi}{2}$  ist.

Da die Eigenschaften des Systems maßgeblich von  $x_3$  abhängen, ist es nützlich sich dessen zeitliche Änderung auch in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene zu vergegenwärtigen. Aus Gleichung (103) folgt für  $x_4 = 0$ :

$$\lambda = -\kappa x_2 = (1 + \eta \cos x_3)x_2. \quad (111)$$

Diese Gerade, welche in Abbildung 10 als punktierte Linie eingezeichnet ist, teilt die betrachtete Ebene in zwei Teile. Oberhalb dieser Linie ist  $x_4$  positiv und mithin wächst  $x_3$ , während unterhalb das Gegenteil der Fall ist. Konstante  $x_4$ -Niveaus werden durch die Parallelen zu ihr gebildet. Die Rolle der „ $x_4=0$ -Geraden“ wird im Laufe des folgenden Kapitels noch weiter untersucht.

## 5 Heuristische Bewegungsplanung

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln das Manipulatorsystem und bisher bekannte Ansätze zur Ruhelagen-Überführung untersucht worden sind, werden im aktuellen Kapitel einige der dabei gewonnenen Erkenntnisse herangezogen, um ein alternatives Verfahren zu skizzieren. Die im Abschnitt 4.4.2 eingeführte Normalform (106) und die sich durch ihre Betrachtung ergebenden Vereinfachungen werden grundlegend sein, für die schrittweise und heuristische<sup>16</sup> Herangehensweise. Durch die Aufteilung in Teilschritte wird erreicht, dass sich Teilprobleme ergeben, die leichter zu überschauen und damit leichter zu lösen sind als die Gesamtaufgabe.

Um das Verständnis der folgenden Abschnitte zu erleichtern sind einige Bemerkungen im Voraus angebracht: Als wesentliches Werkzeug zum Erzielen des gewünschten Bewegungsablaufes wird die Methode der Gleitregime-Regelung (auch „Sliding-Mode-Regelung“, engl. „sliding mode control“) verwendet, die beispielsweise in den Referenzen [SL91, Kapitel 7], [Heb95] vorgestellt wird. Die dafür notwendigen Gleitflächen werden durch Kurven in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene definiert, die sich mit einer Funktion  $\varphi$  durch

$$x_2 = \varphi(\lambda) \tag{112}$$

beschreiben lassen. Diese Kurve kann man als „Schaltlinie“ einer zugehörigen Schaltfunktion

$$\Phi(\mathbf{z}) := x_2 - \varphi(\lambda) \tag{113}$$

auffassen, mit welcher sich wiederum die Gleitfläche als Teilmenge des Zustandsraumes beschreiben lässt:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^4 : \Phi(\mathbf{z}) = 0\}. \tag{114}$$

Für die Diskussion der Bewegung des Systems in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene werden die Begriffe „Gleitfläche“ und „Schaltlinie“ synonym verwendet. Um verschiedene Gleitflächen mit einer übersichtlichen Notation zu referenzieren, sei vereinbart, dass sich Indizes von  $\varphi$  auf die zugehörige Gleitfläche  $\mathcal{S}$  übertragen.

Im Mittelpunkt der folgenden Überlegungen wird das Verhalten des Systems während des durch  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$  gegebenen Gleitregimes stehen. Die Robustheit des Regelungskonzeptes gegenüber Modellunsicherheiten, die oft<sup>17</sup> im Zusammenhang mit Gleitregime-Regelungen betrachtet wird, ist für die durchgeführten Untersuchungen nicht von Bedeutung. Ebenso wird das als „Klappern“ („Chattering“) bekannte Phänomen nicht näher betrachtet. Dieser für eine praktische Realisierung unerwünschte Effekt kann für die Simulationsuntersuchungen toleriert werden.

<sup>16</sup> Das sich vom griechischen Wort für „suchen“ ableitende Adjektiv wird hier im Sinne eines intuitiven und zielgerichteten Vorgehens benutzt.

<sup>17</sup>Z. Bsp in den Referenzen [XO08, AE08].

Für die Durchführung der numerische Integration wurde die `scipy`-Funktion `odeint` genutzt welche ein Mehrschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung implementiert [SCIPY]. Das Eingangssignal  $v$  wurde dabei für jeweils 0.001 s konstant gehalten. Für den Trägheitsparameter des Manipulatormodells wird im gesamten Kapitel  $\eta = 0.9$  verwendet. Die Werte der auftretenden Reglerparameter werden bei der Einführung des jeweiligen Parameters angegeben, wenn sie für alle durchgeführten Simulationen gleich bleiben, bzw. sind in der Beschreibung der einzelnen Simulationsuntersuchungen enthalten, wenn sich ändern.

## 5.1 Gleitregime-Bremse

Voraussetzung für eine Überführung zwischen zwei Ruhelagen ist es, die Startruhelage verlassen und die Zielruhelage erreichen zu können. Diese beiden Vorgänge stellen somit sinnvolle Kandidaten für das als erstes zu untersuchende Teilproblem dar.

Da wir gesehen hatten, dass für eine Ruhelage in jeder Systemdarstellung der Eingang verschwinden muss, ist das Verlassen selbiger durch ein beliebiges von Null verschiedenes Eingangssignal möglich. Da aber unklar ist, was danach geschehen soll, ist der Nutzen dieser Erkenntnis stark begrenzt.

Anders sieht es für das Bremsen aus: Zwar hatten wir in Abschnitt 4.2 festgestellt, dass das Erreichen einer Ruhelage schwierig sein dürfte, aber wenn es unter bestimmten Startbedingungen gelänge, dann hätte man einerseits einen substantiellen Teil der Gesamtaufgabe gelöst und andererseits ein klar definiertes Restproblem geschaffen, welches die Überführung von der Startruhelage bis zum Erfüllen der Startbedingungen für das Bremsen umfasste.

Wir widmen uns deshalb nun also als erstes dem Erreichen einer Gleichgewichtslage. Um die Überlegungen einfacher zu gestalten, soll zunächst egal sein, welche Stellung der Arm am Ende dieses Manövers annimmt. Bezugnehmend auf die Kategorisierung der möglichen Regelungsaufgaben in Abschnitt 4.1 soll mithin  $(V,V,V,V) \rightarrow (F,0,F,0)$  gelöst werden. Ausgehend von einem noch zu spezifizierenden vorgegebenen Zustand soll das System also in eine beliebige Ruhelage geführt werden.

Sowohl in der  $x_2$ - $x_4$ -, als auch in der  $x_2$ - $\lambda$ -Darstellung erfüllt der Koordinatenursprung das Regelungsziel  $(F,0,F,0)$ . Aufgrund der Eingangsunabhängigkeit von  $\dot{\lambda} = D(\mathbf{z})$  ist eine qualitative Diskussion der Dynamik für letztere jedoch deutlich einfacher. Für die folgenden Betrachtungen wird deshalb die Modelldarstellung in Normalform zugrunde gelegt. Aus Gleichung (108) geht hervor, dass  $D(\mathbf{z})$  verschwindet für  $x_2 \rightarrow 0$ . Eine Gleitfläche auf der eine Bewegung in eine Ruhelage stattfinden kann, muss also im Ursprung parallel zur  $x_2$ -Achse verlaufen.



Für die Bahnkurve der Schaltlinie muss folglich gelten:

$$\left| \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \right| \Big|_{x_2=0} = \infty. \quad (115)$$

Ruft man sich außerdem Abbildung 11 in Erinnerung, wird klar, dass eine solche Bahn nur in den Sektoren liegen kann, in denen  $\sigma = +1$  gilt und die die  $x_2$ -Achse als begrenzende Gerade besitzen. Von dieser Art gibt es für alle  $x_3$  mit Ausnahme der isolierten Fälle  $x_3 \in \{0, \pi\}$  jeweils zwei Sektoren, wovon einer ein kompletter Quadrant<sup>18</sup> ist. Der andere, welcher eine dreiecksförmige Gestalt hat, wird durch die Nulldriftgerade begrenzt, die ihre Neigung und damit die Ausdehnung dieses Sektors in Abhängigkeit von  $x_3$  ändert. Ersterer ist deshalb die einfachere Wahl, um in ihm eine Trajektorie in den Ursprung zu finden. Wir betrachten nun diesen Sektor, der nach Abbildung 11(a) für  $x_3 \in (0, \frac{1}{2}\pi)$  mit dem offenen vierten Quadranten zusammenfällt. Dazu definieren wir ihn zunächst als Teilmenge des Zustandsraumes:

$$\Sigma_1 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^4 : x_3 \in (0, \frac{1}{2}\pi), x_2 > 0, \lambda < 0\}. \quad (116)$$

Wenn wir das Richtungsfeld des  $x_2$ - $\lambda$ -Teilsystems in  $\Sigma_1$  untersuchen, können wir eine qualitative Ähnlichkeit mit dem Richtungsfeld in der Phasenebene eines Doppelintegrators  $\ddot{x} = \tilde{v}$  mit dem Eingang  $\tilde{v}$  ausmachen. Für dieses System lässt sich mit dem Zustandsvektor<sup>19</sup>  $(y, x)^T := (\dot{x}, x)^T$  die Darstellung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{D}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \tilde{\mathbf{g}}} \tilde{v} \quad (117)$$

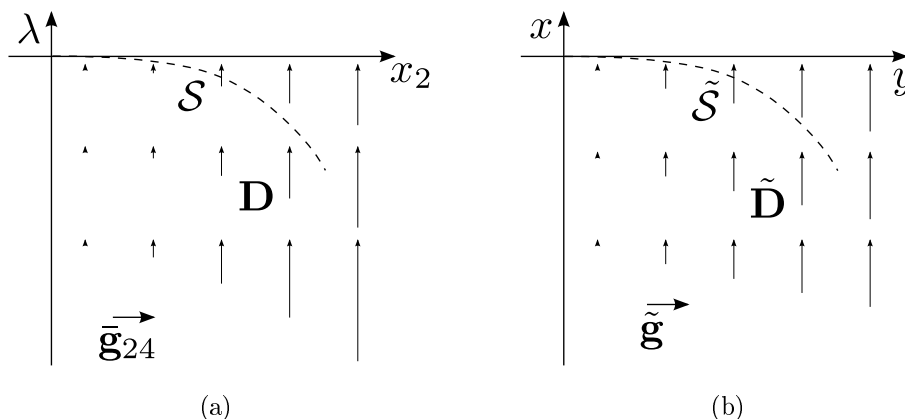
angeben. Abbildung 12 veranschaulicht die Gemeinsamkeiten.

Für ein System der Form (117) wurde in Referenz [BB98] ein Gleitregime-Regler vorgestellt<sup>20</sup>, welcher den Ursprung der  $x$ - $y$ -Ebene in endlicher Zeit erreicht und global stabilisiert. Berücksichtigt man die Unterschiede zwischen den beiden Diff-Termen  $D(\mathbf{z})$  und  $y$ , lässt sich, wie wir im Folgenden sehen werden, auf dieser Basis ein Regelgesetz finden, welches unter bestimmten Startbedingungen den Ursprung der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene und damit eine Ruhelage des unteraktuierten Manipulatorsystems in endlicher Zeit erreicht.

<sup>18</sup> Die Zuordnung der Quadranten mit  $\sigma = +1$  zu den Teilabbildungen lautet: 11(a): IV; 11(b): I; 11(c): III; 11(d): II.

<sup>19</sup> Die unübliche Sortierung dient dazu, den Vergleich beider Systeme zu erleichtern.

<sup>20</sup> In Referenz [MRB06] wurde dieser Regelalgorithmus zur Positionierung des Ellenbogenwinkels bereits im Zusammenhang mit dem unteraktuierten Manipulator benutzt.



**Abbildung 12:** Qualitative Ähnlichkeit der Richtungsfelder. (a): Richtungsfeld des Manipulatorsystems für  $\mathbf{z} \in \Sigma_1$  in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. Es gilt wie in Abbildung 10:  $\mathbf{D} = (0, D(\mathbf{z}))^T$  und  $\bar{\mathbf{g}}_{24} = (1, 0)^T$ . (b): Richtungsfeld des Doppelintegrators im vierten Quadranten der  $y$ - $x$ -Ebene. Die strichlierte Kurve deutet für beide Systeme eine mögliche Gleitfläche an, auf der eine Bewegung in den Ursprung ablaufen könnte.

Mit der in den Gleichungen (112) und (113) eingeführten Notation wird nun zunächst eine allgemeine Rückführung bestimmt, welche das System auf  $\mathcal{S}$  stabilisiert. Dazu wird für den Eingang

$$v = \varphi'(\lambda)D(\mathbf{z}) - \gamma_1 \text{sign}(\Phi(\mathbf{z}))|\Phi(\mathbf{z})|^{\gamma_2} \quad (118)$$

angesetzt, wobei für die beiden reellen Parameter  $\gamma_1 > 0$  und  $\gamma_2 \in (0, 1)$  gelte. Die positive Invarianz der Gleitfläche lässt sich nun durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{z})^2 &= \Phi(\mathbf{z}) \dot{\Phi}(\mathbf{z}) \\ &= \Phi(\mathbf{z}) \left( \dot{x}_2 - \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \dot{\lambda} \right) = \Phi(\mathbf{z}) (v - \varphi'(\lambda)D(\mathbf{z})) \\ &= \Phi(\mathbf{z}) (-\gamma_1 \text{sign}(\Phi(\mathbf{z}))|\Phi(\mathbf{z})|^{\gamma_2}) = -\gamma_1 |\Phi|^{1+\gamma_2} \leq 0 \end{aligned} \quad (119)$$

zeigen. Für alle weiteren Betrachtungen sind die konkreten Werte für  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  weniger von Bedeutung, weil hauptsächlich das Verhalten *während* des Gleitregimes untersucht wird, was  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$  impliziert. Für die durchgeführten Simulationen gilt deshalb stets:  $\gamma_1 = 10$  und  $\gamma_2 = 0.1$ .

Um zu erreichen, dass das System in endlicher Zeit auf der Schaltlinie in den Ursprung „gleitet“, müssen wir nun für  $\varphi(\lambda)$  einen konkreten Ansatz machen. Wir greifen dabei, wie erwähnt, die Herangehensweise aus [BB98] auf, wo eine Potenzfunktion verwendet wird. Diese sei mit  $\psi$  bezeichnet und wird später noch weitere

Verwendung finden. Es gelte

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) := (|\lambda|\mu\beta)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (120)$$

wobei  $\mu$  positiv und reell sei und einen Entwurfsparameter darstellt, dessen Einfluss wir später untersuchen werden<sup>21</sup>. Augenblicklich interessanter ist es, die Bedeutung von  $\beta \in \mathbb{R}$  näher zu beleuchten.

Damit die Gleitfläche qualitativ der in Abbildung 12(a) eingezeichneten gleicht, muss  $\beta > 1$  gelten. Diese Erkenntnis reicht jedoch noch nicht, um eine endliche Erreichungszeit des Ursprungs folgern zu können. Erst die Betrachtung des Systems während des Gleitregimes, also während  $\Phi = 0$ , liefert die nötigen Einblicke. Unter dieser Bedingung gilt für  $\mathbf{z} \in \Sigma_1$

$$\lambda = \psi^{-1}(x_2) := -\frac{1}{\mu\beta}x_2^\beta, \quad (121)$$

$$\psi'(\psi^{-1}(x_2)) = -\mu x_2^{1-\beta}. \quad (122)$$

Mit diesem Wissen untersuchen wir nun den aus Gleichung (118) resultierenden Ausdruck für  $\dot{x}_2$ , indem wir  $D(\mathbf{z})$  aus Gleichung (108) explizit ausschreiben und die eben erhaltenen Beziehungen einsetzen:

$$\dot{x}_2 = v = \varphi'D = \psi'D = -\mu\eta^2 x_2^{3-\beta} \sin(2x_3) - \frac{\eta}{\beta} x_2^2 \sin x_3. \quad (123)$$

Aus diesem Zwischenergebnis können wir ablesen, dass  $\dot{x}_2$  auf der Gleitfläche für  $\mathbf{z} \in \Sigma_1$  streng negativ ist - eine günstige Voraussetzung für das Erreichen von  $x_2 = 0$  in endlicher Zeit, allerdings noch nicht ausreichend.

Die nächste Überlegung betrifft  $x_3$ : Obwohl wir  $x_3(t)$  nicht explizit kennen, muss wegen der offenen Definition von  $\Sigma_1$  stets  $k > 0$  derart existieren, dass

$$\min(\sin x_3, \sin(2x_3)) \geq k \quad (124)$$

gilt. Auf dieser Grundlage kann die Abschätzung

$$\dot{x}_2 < -\mu\eta^2 k x_2^{3-\beta} - \frac{\eta}{\beta} k x_2^2 < -\underbrace{\mu\eta^2 k}_{=: \tilde{k}} x_2^{3-\beta}, \quad (125)$$

getroffen werden. Nun können wir zum Vergleich die einfache DGL

$$\dot{x} = -\tilde{k}x^{3-\beta} \quad \text{mit } \tilde{k}, \beta > 0, \quad x \geq 0 \quad \text{und } x_0 := x(0) > 0 \quad (126)$$

---

<sup>21</sup> Die physikalische Dimension des Argumentes und des Funktionswertes von  $\psi$  ist jeweils eine Winkelgeschwindigkeit. Um dies zu gewährleisten, muss  $\mu$  die Einheit  $s^{1-\beta}$  haben. Auf die Angabe dieser Einheit wird aus Gründen der Übersicht jedoch verzichtet.

betrachten. Für  $\beta = 2$  erhält man als Lösung Exponentialfunktionen. Für  $\beta \neq 2$  lässt sich mittels Trennung der Veränderlichen für  $t \geq 0$  die Lösung

$$x(t) = (x_0^{\beta-2} - (\beta - 2)\tilde{k}t)^{\frac{1}{\beta-2}} \quad (127)$$

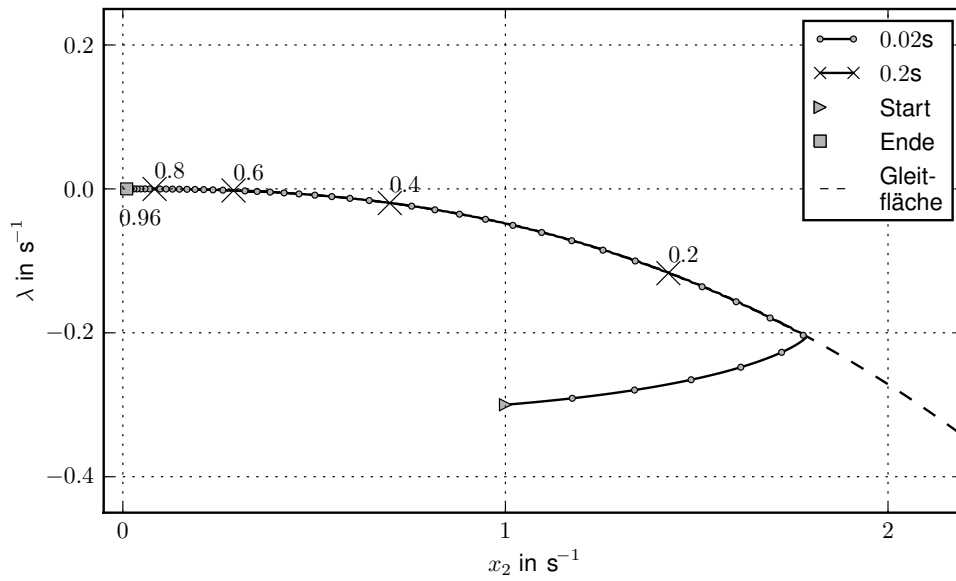
angeben, aus der man ablesen kann, dass  $x(t) = 0$  für  $\beta > 2$  zum Zeitpunkt  $\tilde{t} = x_0^{\beta-2}/((\beta - 2)\tilde{k})$ , d. h. nach endlicher Zeit erreicht wird. Da die rechte Seite von (123) für  $\mathbf{z} \in \Sigma_1$  stets kleiner ist als die rechte Seite von (126), können wir schlussfolgern, dass dann mit  $\beta > 2$  auch  $x_2 = 0$  in endlicher Zeit erreicht wird. Gleichzeitig muss nach Gleichung (123)  $\beta \leq 3$  gelten, damit  $v$  nahe des Ursprungs begrenzt bleibt.

Analoge Überlegungen lassen sich auch für die anderen Quadranten mit  $\sigma = +1$  aus Abbildung 11 unter Berücksichtigung des jeweiligen Intervalls für  $x_3$  durchführen, jeweils mit dem Ergebnis, dass  $\beta \in (2, 3)$  gelten muss. Wie sich in Simulationsversuchen gezeigt hat, spielt der konkrete Wert von  $\beta$  keine große Rolle für das Verhalten des Systems während des Gleitregimes, solange er aus dem Intervall stammt. Für alle weiteren Überlegungen gelte deshalb  $\beta = 2.5$ .

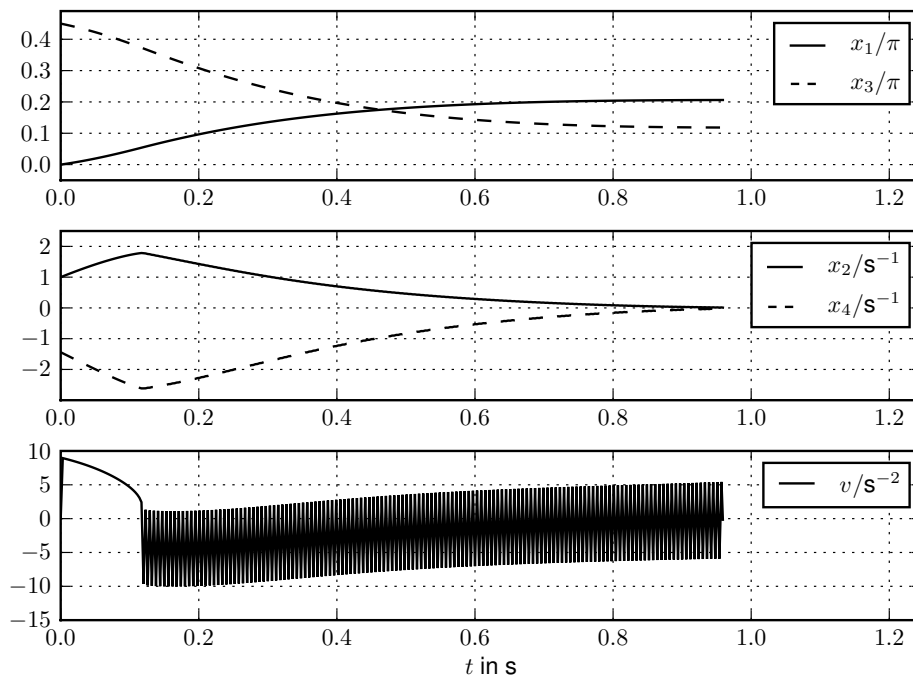
Mit dem Parameter  $\mu$ , der die Rolle eines Skalierungsfaktors einnimmt, kann die Lage der Schaltlinie in der Ebene stark variiert werden. Dieser Parameter hat deshalb einen großen Einfluss auf den Bewegungsablauf während des Gleitregimes, auf den in Abschnitt 5.6 genauer eingegangen wird.

Unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{z}$  während des Regelvorgangs in  $\Sigma_1$  verbleibt, kann also der Zweigelenkmanipulator in endlicher Zeit angehalten, d. h. in einen energielosen Zustand gebracht werden. Diese Voraussetzung kann jedoch aus verschiedenen Gründen verletzt werden. Zum einen können die Trajektorien, zum Beispiel bedingt durch eine technisch begrenzte Schaltgeschwindigkeit des Reglers die Gleitfläche verlassen und damit eventuell auch die Sektorgrenze  $\lambda = 0$  überschreiten. Dann gilt, wie Abbildung 11(a) zeigt,  $\sigma = -1$ , sodass das System von der  $x_2$ -Achse wegdriftet, und damit den Ursprung nicht mehr erreichen kann. Zum anderen kann selbst bei Annahme eines unendlich schnellen Reglers  $x_3$  seine untere Intervallgrenze unterschreiten, denn überall in  $\Sigma_1$  gilt  $\dot{x}_3 = x_4 < 0$ , wie sich leicht mit Gleichung (104) überprüfen lässt. Das Erreichen des Ursprungs hängt also von den konkreten Werten des Anfangszustandes  $\mathbf{x}$  ab.

Abbildung 13 veranschaulicht Simulationsergebnisse für ein durchführbares Abbremsmanöver bei bestimmten Anfangsbedingungen, während Abbildung 14 das Scheitern dieses Konzeptes bei leicht veränderten Anfangsbedingungen zeigt. Das deutet einerseits an, dass der Gleitregime-Ansatz vielversprechend in Bezug auf die Punkt-zu-Punkt-Bewegung des Manipulators ist, zum anderen legt es aber auch noch Untersuchungsbedarf offen. Im nächsten Abschnitt wird deshalb allgemein das Verhalten des Manipulatorsystems auf Gleitflächen in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene studiert.

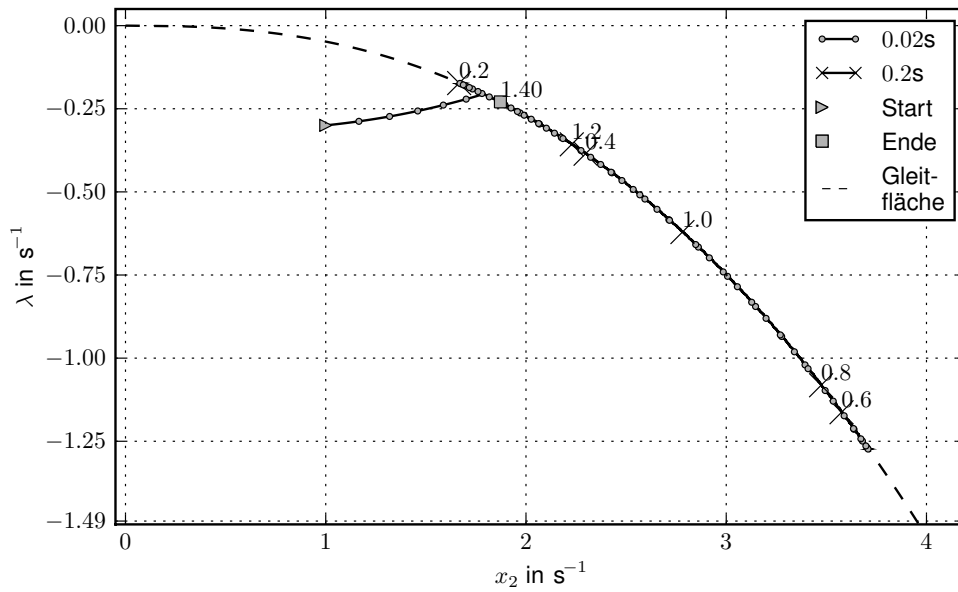


(a)

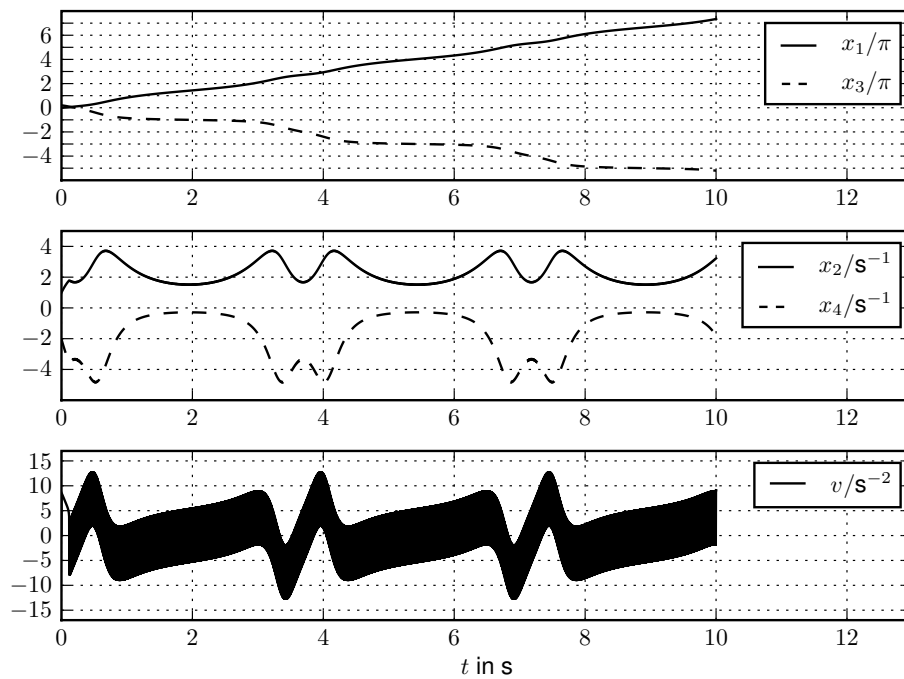


(b)

**Abbildung 13:** Das Erreichen des  $x_2$ - $\lambda$ -Ursprungs mittels Sliding-Mode-Regler. (a): Trajektorie in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. (b): Zeitverläufe der Winkel, der -geschwindigkeiten und des Eingangssignals. Nach ca. 0.12 s befindet sich das System im Gleitregime und nach knapp 1 s ist die Ruhelage erreicht. Die Startbedingungen sind  $(*x_1, *x_2, *x_3, *\lambda)^T = (0, 1 \text{ s}^{-1}, 0.45\pi, -0.3 \text{ s}^{-1})^T$ .



(a)



(b)

**Abbildung 14:** Der Ursprung der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene wird nicht erreicht. Stattdessen ergibt sich eine periodische Bewegung auf der Gleitfläche. Aus Gründen der besseren Übersicht sind in (a) nur die ersten 1.4 s der Bewegung dargestellt. Die Anfangsbedingungen unterscheiden sich von Abbildung 13 nur bezüglich des Ellenbogenwinkels:  $*x_3 = 0.2\pi$ .

## 5.2 Verhalten des Systems auf Gleitflächen

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Eigenschaften untersucht, die auf das System zutreffen, wenn es durch eine Rückführung der Form

$$v = \varphi'(\lambda)D(\mathbf{z}) - \gamma_1 \text{sign}(\Phi(\mathbf{z}))|\Phi(\mathbf{z})|^{\gamma_2} \quad (128)$$

auf einer durch  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$  und

$$\Phi(\mathbf{z}) = x_2 - \varphi(\lambda) \quad (129)$$

gegebenen Gleitfläche  $\mathcal{S}$  stabilisiert wird.

Während das System mit der Rückführung (128) beaufschlagt wird, kann man zwei Fälle unterscheiden: Entweder findet eine Bewegung in Richtung der Gleitfläche statt, wenn bedingt durch Anfangswerte  $\Phi(\mathbf{z}) \neq 0$  gilt<sup>22</sup>. Oder der Systemzustand erfüllt die Bedingung  $\Phi(\mathbf{z}) = 0$ , das System befindet sich also im Gleitregime und bewegt sich wegen der positiven Invarianz von  $\mathcal{S}$  folglich *auf* der Gleitfläche. Die folgenden Untersuchungen konzentrieren sich auf den letzteren Fall. Dies wird dadurch gerechtfertigt, dass die Schaltlinien für die schlussendliche Bewegungsplanung derart gestaltet werden, dass sich nennenswerte Phasen mit  $\Phi(\mathbf{z}) \neq 0$  nicht ergeben – abgesehen von einem speziellen Bewegungsmuster, welches in Abschnitt 5.5 beschrieben wird.

Betrachtet sei nun das  $x_3$ - $\lambda$ -Teilsystem, welches während des Gleitregimes der durch

$$\dot{x}_3 = \lambda - (1 + \eta \cos x_3)\varphi(\lambda) =: f_{x_3}(x_3, \lambda) \quad (130a)$$

$$\dot{\lambda} = -\eta\varphi(\lambda) \sin x_3(\lambda - \eta\varphi(\lambda) \cos x_3) =: f_\lambda(x_3, \lambda) \quad (130b)$$

gegebenen Differentialgleichung genügt. Motiviert durch die Untersuchung der Symmetriebedingung und der damit erklärbaren Eigenschaften in Abschnitt 4.3 soll nun eine ähnliche Betrachtung durchgeführt werden, welche sich speziell auf die Größen  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  konzentriert. Die daraus abgeleiteten Erkenntnisse, die sich in Form von drei Eigenschaften zusammenfassen lassen, werden in den folgenden Abschnitten den Aufwand zur heuristischen Konstruktion von Gleitflächen deutlich verringern und für bestimmte Teilprobleme eine einfache Lösung offenbaren.

---

<sup>22</sup> Das Verlassen der Gleitfläche, d. h.  $\Phi(\mathbf{z}) \neq 0$ , kann natürlich auch durch Störungen, oder die endliche Schaltgeschwindigkeit des Reglers verursacht werden, was hier jedoch nicht näher betrachtet wird.

**Zeitumkehr-Eigenschaft**

Augenscheinlich genügen die Funktionen  $f_{x_3}$  und  $f_\lambda$  der Symmetriebedingung

$$f_{x_3}(-x_3, \lambda) = f_{x_3}(x_3, \lambda), \quad (131a)$$

$$f_\lambda(-x_3, \lambda) = -f_\lambda(x_3, \lambda). \quad (131b)$$

Diese Symmetrie kann genutzt werden, um eine sich an Gleichung (97b) orientierende Aussage zu zeigen: Wenn  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  für  $t \in [0, \tau]$  der DGL (130) genügen, liefert auch

$$\tilde{x}_3(t) := -x_3(\tau - t) \quad (132a)$$

$$\tilde{\lambda}(t) := \lambda(\tau - t) \quad (132b)$$

eine Lösung der DGL für  $t \in [0, \tau]$ . Differenziert man den Ansatz nämlich nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = -\dot{x}_3(\tau - t)(-1) = f_{x_3}(x_3(\tau - t), \lambda(\tau - t)) \quad (133a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = \dot{\lambda}(\tau - t) = -f_\lambda(x_3(\tau - t), \lambda(\tau - t)), \quad (133b)$$

wobei im zweiten Schritt ausgenutzt wurde, dass  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  Lösungen der DGL sind. Nun kann man die Symmetriebedingungen (131) nutzen, um die Vorzeichen der Argumente anzupassen:

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = f_{x_3}(\underbrace{-x_3(\tau - t)}_{\tilde{x}_3(t)}, \underbrace{\lambda(\tau - t)}_{\tilde{\lambda}(t)}), \quad (134a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = f_\lambda(\underbrace{-x_3(\tau - t)}_{\tilde{x}_3(t)}, \underbrace{\lambda(\tau - t)}_{\tilde{\lambda}(t)}), \quad (134b)$$

und dann die Größen aus Gleichung (132) einzusetzen. Dadurch erhält man

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = f_{x_3}(\tilde{x}_3(t), \tilde{\lambda}(t)), \quad (135a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = f_\lambda(\tilde{x}_3(t), \tilde{\lambda}(t)), \quad (135b)$$

womit gezeigt ist, dass der Ansatz (132) eine Lösung von (130) ist.

Diese Eigenschaft hat eine angenehme Konsequenz: Wenn eine Gleitfläche bekannt ist, mit der eine Ruhelage mit  ${}^e x_3$  verlassen, und ein bestimmter Punkt in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene mit  $x_3 = {}^l x_3$  erreicht wird, so ist gleichzeitig klar, dass auf eben dieser Gleitfläche eine Ruhelage mit  ${}^e \tilde{x}_3 = -{}^e x_3$  erreicht wird, wenn die Bewegung in diesem Punkt mit  $\tilde{x}_3(0) = -{}^l x_3$  startet. Die bekannte Bewegung läuft dann gewissermaßen rückwärts ab, weshalb sich die Bezeichnung „Zeitumkehr-Eigenschaft“ anbietet.



**Wiederkehr-Eigenschaft**

Mit der Symmetrie (131) lässt sich noch eine zweite, ähnliche, Eigenschaft zeigen, die ohne konkrete Entsprechung in Abschnitt 4.3 ist. Sie lässt sich in der folgenden Aussage zusammenfassen: Wenn  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  für  $t \in [0, \tau]$  der DGL (130) genügen und  $x_3(\tau) = k\pi$ , mit  $k \in \mathbb{Z}$  gilt, dann liefert

$$\tilde{x}_3(t) := 2x_3(\tau) - x_3(2\tau - t) \quad (136a)$$

$$\tilde{\lambda}(t) := \lambda(2\tau - t) \quad (136b)$$

eine Fortsetzung der Lösung für  $t \in [\tau, 2\tau]$ . In einer zu oben analogen Argumentation lässt sich dies belegen. Zunächst wird der Ansatz (136) nach der Zeit abgeleitet,

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = -\dot{x}_3(2\tau - t)(-1) = \dot{x}_3(2\tau - t) = f_{x_3}(x_3(2\tau - t), \lambda(2\tau - t)) \quad (137a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = -\dot{\lambda}(2\tau - t) = -f_{\lambda}(x_3(2\tau - t), \lambda(2\tau - t)), \quad (137b)$$

und die vorausgesetzte Lösungs-Eigenschaft von  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  benutzt. Nun kann mit Hilfe von Gleichung (131a) die Schlussfolgerung

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = f_{x_3}(-x_3(2\tau - t), \lambda(2\tau - t)) \quad (138)$$

gezogen werden. Da zusätzlich zu (131a) für  $f_{x_3}$  auch noch eine Invarianz bezüglich einer Addition ganzzahliger Vielfacher von  $2\pi$  zum ersten Argument gilt, kann unter Verweis auf die Voraussetzung  $x_3(\tau) = k\pi$  mithin auch die Umformung

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = f_{x_3}(\underbrace{2x_3(\tau) - x_3(2\tau - t)}_{\tilde{x}_3}, \underbrace{\lambda(2\tau - t)}_{\tilde{\lambda}}) = f_{x_3}(\tilde{x}_3, \tilde{\lambda}) \quad (139a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = f_{\lambda}(\underbrace{2x_3(\tau) - x_3(2\tau - t)}_{\tilde{x}_3}, \underbrace{\lambda(2\tau - t)}_{\tilde{\lambda}}) = f_{\lambda}(\tilde{x}_3, \tilde{\lambda}) \quad (139b)$$

vorgenommen werden, welche die Aussage belegt.

Die Auswirkungen dieser Eigenschaft kann Abbildung 14 entnommen werden: Wenn eine  $x_3$  eine durch  $k\pi$  markierte Grenze überschreitet, und das System weiterhin auf der selben Gleitfläche stabilisiert wird, dann läuft die bisherige Bewegung auf dieser Gleitfläche rückwärts ab.

Diese „Wiederkehr-Eigenschaft“ kann dazu führen, dass sich auf dieser Gleitfläche ein periodisches Bewegungsmuster ergibt. Das einfachste Beispiel hierfür ist eine Schaltlinie mit  $\varphi(\lambda) = \bar{x}_2 = \text{const}$ . Dann gilt  $v \equiv 0$ , womit die in Abschnitt 4.2.2 untersuchten Verhältnisse vorliegen, in denen die (interne) Systemdynamik zur Pendel-DGL wird.

### Quadrantenumkehr-Eigenschaft

Setzt man für die Kurve, durch welche die Gleitfläche in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene bestimmt wird, Punktsymmetrie voraus, gilt also

$$\varphi(-\lambda) = -\varphi(\lambda), \quad (140)$$

so kann man eine weitere Eigenschaft des Systems folgern, welche mit Gleichung (92) in Zusammenhang steht. Wie sich leicht überprüfen lässt, gilt dann nämlich

$$f_{x_3}(-x_3, -\lambda) = -f_{x_3}(x_3, \lambda), \quad (141a)$$

$$f_\lambda(-x_3, -\lambda) = -f_\lambda(x_3, \lambda). \quad (141b)$$

Darauf aufbauend lässt sich nun die Gültigkeit der folgenden Aussage zeigen: Erfüllen  $x_3(t)$  und  $\lambda(t)$  die DGLn (130) für  $t \in [0, \tau]$ , dann gilt dies auch für

$$\tilde{x}_3(t) := -x_3(t) \quad (142a)$$

$$\tilde{\lambda}(t) := -\lambda(t). \quad (142b)$$

Um dies zu belegen, gehen wir nach dem bekannten Muster vor: Der Ansatz wird nach der Zeit abgeleitet:

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = -\dot{x}_3(t) = -f_{x_3}(x_3(t), \lambda(t)), \quad (143a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = -\dot{\lambda}(t) = -f_\lambda(x_3(t), \lambda(t)). \quad (143b)$$

Danach kann mit Hilfe der Symmetriebedingungen (141) die rechte Seite der Gleichung so umgeformt werden, dass man die DGLn (130) erhält:

$$\dot{\tilde{x}}_3(t) = f_{x_3}(-x_3(t), -\lambda(t)) = f_{x_3}(\tilde{x}_3(t), \tilde{\lambda}(t)), \quad (144a)$$

$$\dot{\tilde{\lambda}}(t) = f_\lambda(-x_3(t), -\lambda(t)) = f_\lambda(\tilde{x}_3(t), \tilde{\lambda}(t)). \quad (144b)$$

Diese Eigenschaft wird sich ebenfalls als nützlich erweisen. Sie erlaubt die Feststellung, dass eine bekannte Bewegung auf einer Gleitfläche im ersten Quadranten der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene bei umgekehrtem Vorzeichen von  $x_3$  im dritten Quadranten analog abläuft und dass selbiges auch für den zweiten und vierten Quadranten gilt. Vor diesem Hintergrund wird die Bezeichnung als „Quadrantenumkehr-Eigenschaft“ klar.

### Stationäre Punkte und endliche Fluchtzeit

Betrachtet man die Dynamik auf der Gleitfläche, also die Gleichungen (130), ist es ohne weiteres möglich, die Ruhelagen des  $x_3$ - $\lambda$ -Teilssystems zu bestimmen. Neben

den Ruhelagen des Gesamtsystems, die durch  $\lambda = \varphi(\lambda) = 0$  gegeben sind, stellen auch

$$x_3 = 0, \quad (145a)$$

$$\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = 1 + \eta, \quad \varphi(\lambda) \neq 0 \quad (145b)$$

und

$$x_3 = \pi, \quad (146a)$$

$$\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = 1 - \eta, \quad \varphi(\lambda) \neq 0 \quad (146b)$$

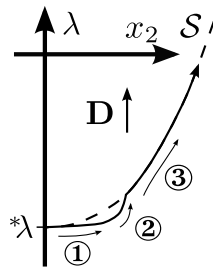
stationäre Lagen der Gleitregime-Dynamik dar. Da für  $\eta < 1$  in beiden Fällen  $\lambda$  und  $\varphi(\lambda) = x_2$  das gleiche Vorzeichen haben müssen, ist klar, dass bei starker Trägheitskopplung diese stationären Lagen nur im ersten und dritten Quadranten vorkommen können. Derartige Punkte gilt es bei der Gleitflächenplanung zu vermeiden. Sie liegen notwendigerweise auf der  $x_4=0$ -Geraden.

Eine weitere unerwünschte Situation kann im Zusammenhang mit dieser Geraden ebenfalls auftreten: Liegt die Schaltlinie auf dieser Geraden, und sind die Anfangsbedingungen derart, dass  $\sigma = -1$  gilt, dass also das System von der  $x_2$  Achse wegdriftet, dann führt dies dazu, dass  $|\lambda|$  und  $|x_2|$  in endlicher Zeit über alle Grenzen wachsen – ganz analog zum Fall endlicher Fluchtzeit aus Abschnitt 2.5.1. Dies kann jedoch ausgeschlossen werden, wenn  $|\varphi(\lambda)|$  nach oben beschränkt ist<sup>23</sup>. Dann nämlich gelten die Bedingungen aus Abschnitt 2.5.2, welche die globale Existenz der Lösung sichern.

### Lipschitz-Bedingung und Eindeutigkeit der Lösung

Im Abschnitt 5.1 wurde für die Konstruktion der Gleitfläche eine Kurve angesetzt, welche auf der  $\lambda$ -Achse eine waagerechte Tangente besitzt. Auch in den folgenden Abschnitten werden ähnliche Schaltlinien immer wieder benutzt. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Bewegung auf dieser Art von Kurven aus mathematischer Sicht ein Problem mit sich bringt: Die Lösung der Differentialgleichung ist nicht mehr eindeutig. Grund hierfür ist, dass die Funktionen  $f_{x_3}(x_3, \lambda)$  und  $f_\lambda(x_3, \lambda)$  für  $\lambda = 0$  bezüglich ihres zweiten Arguments lokal keine Lipschitz-Bedingung erfüllen. In der Tat ähnelt die in Gleichung (120) verwendete Potenzfunktion mit einem Exponenten zwischen null und eins stark der Funktion, die gewissermaßen als Standardbeispiel für die rechte Seite eines nicht eindeutig lösbaaren Anfangswertproblems dient [Arn01, Kap. 1.2], [Aul04, Kap. 1.2].

<sup>23</sup>Für den verwendeten linearen Ansatz, d. h. dass die Schaltlinie auf der  $x_4=0$ -Geraden liegt, ist dies nicht der Fall.



**Abbildung 15:** Schematische Darstellung des Manöver-Startvorgangs für einen Anfangszustand mit  $x_2 = 0$ ,  $\lambda = *\lambda < 0$  und  $D > 0$  im offenen vierten Quadranten. Auf der  $\lambda$ -Achse gilt  $D = 0$ . Damit die Bewegung wie gewünscht auf der Gleitfläche  $S$  abläuft, wird in Phase ① kurzzeitig ein konstantes Eingangssignal vorgegeben, wodurch das System die  $\lambda$ -Achse verlässt. Dann gilt  $D > 0$  und die Rückführung (118) kann aktiviert werden (Phase ②). Ist die Gleitfläche erreicht, findet die Bewegung auf ihr statt (Phase ③). Auf gleiche Weise lässt sich auch für andere Anfangsbedingungen von  $\lambda$  und  $D$  verfahren.

Was hat dies für Konsequenzen? Keine, wenn die Gleitfläche genutzt wird, um in eine Ruhelage abzubremsen, da die Bewegung genau dann beendet ist, wenn der kritische Punkt auf der Kurve erreicht wird. Soll jedoch eine Bewegung in einem solchen kritischen Punkt auf der Schaltlinie *beginnen*, dann muss „nachgeholfen“ werden. Konkret ist es notwendig, den Eingang  $v$  derart zu bestimmen, dass das System die Gleitfläche und damit den kritischen Punkt kurzzeitig verlässt. Erst im Anschluss daran ist die Rückführung (118) zu aktivieren, welche das System auf der Gleitfläche stabilisiert. Die Drift hat zur Folge, dass dann die Bewegung auf der Gleitfläche eindeutig ist. Abbildung 15 stellt diese Überlegungen dar. Eine sehr kleine „Anfangsauslenkung“ ist vollkommen ausreichend, um den gewünschten Effekt zu erzielen. Weiterhin ist ihr quantitativer Einfluss auf die danach folgende Bewegung auf der Gleitfläche vernachlässigbar. Für eine möglichst einfache Darstellung wird dieser Manöver-Startvorgang deshalb in den nachfolgenden Betrachtungen nicht explizit berücksichtigt.

### 5.3 Heuristische Gleitflächenplanung

Wir wollen nun zum Problem zurückkehren, eine gegebene Ruhelage in eine andere zu überführen. Das im vorangegangenen Abschnitt erworbene Verständnis wird uns dabei behilflich sein.

Wir hatten bereits festgestellt, dass für das Abbremsen nach dem gefundenen Prinzip  $x_3$  in einem bestimmten Wertebereich liegen muss. Um die Planung des Bremsvorgangs von den anderen Teilschritten entkoppelt betrachten zu können, liegt es also nahe, einen Ausgangszustand mit  $x_2 = 0$ , d. h. auf der  $\lambda$ -Achse, vor-

auszusetzen. Dort nämlich verschwindet  $\dot{\lambda}$ , und mithin bewegt sich das System in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene nicht, wenn gleichzeitig noch der Eingang  $v$  bei Null gehalten wird. Man könnte demzufolge den Punkt  $(0, {}^p\lambda)$  als „Parkposition“ bezeichnen. Gleichzeitig gilt aber  $\dot{x}_3 = {}^p\dot{x}_4 = {}^p\dot{\lambda}$ , da auf der  $\lambda$ -Achse  $x_4$  überall mit  $\lambda$  übereinstimmt. Die Regelungsaufgabe  $(V, 0, F, V) \rightarrow (V, 0, V, V)$  kann dann durch Warten mit verschwindendem Eingang bewältigt werden. Eine geeignete Parkposition zeichnet sich also durch einen hinreichend großen Betrag von  ${}^p\lambda$  aus, sodass  $x_3$  nach akzeptabler Zeit in einen Wertebereich eintritt, in welchem das Bremsen möglich ist.

Da es das Ziel ist, das System in einer *vorgegebenen* Ruhelage anzuhalten, stellt sich die Frage, wie die Gleitfläche gestaltet sein muss und welche Anfangsbedingungen gelten müssen, damit das Bremsmanöver mit den gewünschten  $x_1$ - und  $x_3$ -Werten endet.

Analytisch können wir diese Frage für die Anfangsbedingungen nicht beantworten, jedoch müssen wir dies auch nicht. Wenn wir das System von der Zielruhelage ausgehend in umgekehrter Zeitrichtung numerisch integrieren und es dabei auf einer Gleitfläche stabilisiert wird, welche vom Koordinatenursprung der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene zur Parkposition führt, dann erhalten wir, bei Erreichen dieser, genau die gesuchten Anfangsbedingungen.

Es kommt also „nur“ noch darauf an, geeignete Gleitflächen zu finden, was uns im folgenden Abschnitt beschäftigen wird. An dieser Stelle wollen wir mit einigen allgemeineren Überlegungen fortfahren, die den Gesamtbewegungsablauf betreffen. Die soeben skizzierte Teilaufgabe, das System aus einer gegebenen Ruhelage in eine Parkposition zu überführen, lässt sich ganz offensichtlich auch für den Anfang der Bewegung, d. h. für das Beschleunigungsmanöver benutzen – dann selbstverständlich in positiver Zeitrichtung. Durch die in Abschnitt 5.2 formulierte Zeitumkehr-Eigenschaft können wir Beschleunigen und Bremsen sogar als die gleiche Aufgabenstellungen betrachten.

Nun wenden wir uns dem Schulterwinkel zu: Im Gegensatz zur Positionierung des Ellenbogenwinkels kann dessen Beeinflussung nicht durch schlichtes Warten auf der Parkposition ablaufen, denn diese Position wurde ja gerade so festgelegt, dass der Oberarm steht. Im Allgemeinen wird der Wert dabei nicht der sein, der benötigt wird, um nach dem Bremsmanöver den angestrebten Schulterwinkel zu erreichen. Abhilfe hierfür schafft ein Manöver, welches in der Parkposition startet und wieder in der selben endet und in seinem Ablauf  $x_1$  beeinflusst. Natürlich wird ein solches Manöver auch  $x_3$  verändern. Dies stellt allerdings kein Problem dar, da sich im Anschluss durch erneutes Warten auf der Parkposition jede gewünschte Ellenbogen-Konfiguration erreichen lässt. Die Positionierung beider Gelenkwinkel kann also entkoppelt betrachtet werden.

Die Wiederkehr-Eigenschaft aus Abschnitt 5.2 können wir nun benutzen, um ein solches  $x_1$ -Überführungsmanöver zu konzipieren: Wenn das System ausgehend

von einer Parkposition auf einer geeigneten Gleitfläche stabilisiert wird, dann kehrt es nach endlicher Zeit auf die Parkposition zurück. Wenn es sich dabei stets auf einer Seite der  $\lambda$ -Achse befindet, so ändert sich während des Manövers der Wert von  $x_1$ . Zwar ist die genaue Änderung nicht ohne weiteres angebar, jedoch steht ihr Vorzeichen fest: Es entspricht dem Vorzeichen von  $x_2$  auf der Gleitfläche. Wie sich in Abschnitt 5.6 zeigen wird, hängt der Betrag der  $x_1$ -Änderung von der konkreten Gleitfläche ab. Ein solches Manöver lässt sich ggf. wiederholen, sodass insgesamt der Oberarm beliebig positioniert werden kann.

Es bleibt eine letzte Teilaufgabe zu lösen, die jedoch nicht offensichtlich ist, und auch nicht bei jeder Ruhelagenüberführung auftritt. Am Anfang dieses Abschnitts haben wir die Parkposition  $(x_2, \lambda) = (0, {}^p\lambda)$  nur ungenau spezifiziert. Danach soll der Betrag von  ${}^p\lambda$  „hinreichend groß“ sein, sodass sich der Wert von  $x_3 \bmod 2\pi$  in akzeptabler Zeit wiederholt und damit die Wartezeit auf die Startbedingungen für ein Manöver nach oben begrenzt ist.

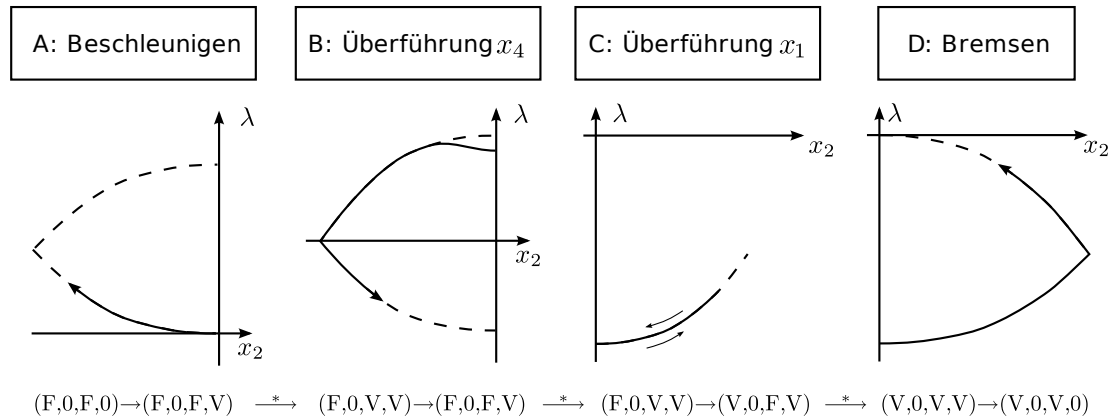
Über das Vorzeichen von  ${}^p\lambda$  wurde bisher jedoch nichts ausgesagt. Im folgenden Abschnitt werden wir für einen festen Wert von  $|{}^p\lambda|$  eine Lösung für das Brems- und Beschleunigungsproblem entwickeln, wobei sich das Vorzeichen von  ${}^p\lambda$  abhängig vom Ellenbogenwinkel in der Ruhelage ergibt. Es kann deshalb je nach gegebener Start- und Zielruhelage zu Kombinationen kommen, in denen eine Parkposition in die gegenüberliegende überführt werden muss. Im Wesentlichen muss also eine Vorzeichenumkehr der Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit erreicht werden. Es bietet sich an, diese *vor* der Anpassung des Schulterwinkels durchzuführen. Ein entsprechendes Manöver ist Gegenstand von Abschnitt 5.5.

Mit diesen vier Teilschritten, welche mit A, B, C und D bezeichnet seien, steht ein Konzept für die Ruhelagenüberführung des unteraktuierten Manipulatormodells zur Verfügung. Abbildung 16 fasst dieses Konzept graphisch zusammen. Die Untersuchungen der Lösungen für die einzelnen Teilprobleme in den folgenden Abschnitten wird zeigen, wie tragfähig die skizzierte Herangehensweise ist.

## 5.4 Manöver A: Beschleunigen und D: Bremsen

Wir widmen uns nun als erstes dem speziellen Problem  $(F,0,F,0) \rightarrow (F,0,F,V)$ . Mit anderen Worten ist es unser Ziel, zu einer beliebigen gegebenen Ruhelage eine Gleitfläche zu finden, auf welcher eine Bewegung von der Ruhelage in eine Parkposition möglich ist. Um die Suche einzuschränken, nehmen wir  $|{}^p\lambda|$  ebenfalls als gegeben an.

Ein plausibler Ansatz für die Gleitfläche ist es, sie abschnittsweise aus der in Gleichung (120) eingeführten Potenzfunktion  $\psi(\lambda) = (|\lambda|\mu\beta)^{\frac{1}{\beta}}$  zusammensetzen.



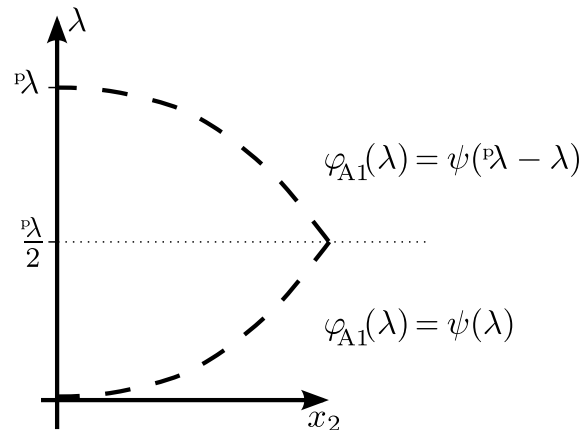
**Abbildung 16:** Schematische Darstellung der Bewegungsabläufe in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene während der Teilschritte bzw. -manöver zur Überführung des Manipulators von einer Ruhelage in eine andere. Manöver A: Verlassen der Startruhelage, Erreichen einer Parkposition. Manöver B: Wechsel der Parkposition (nicht immer notwendig). Manöver C: Anpassung des Schulterwinkels. Manöver D: Verlassen der Parkposition, Erreichen der Zielruhelage. Unter den Piktogrammen sind die Teilaufgaben angegeben, die vom jeweiligen Manöver realisiert werden. Die mit „\*“ gekennzeichneten Pfeile symbolisieren dabei die Wartephase bis die jeweilige Startbedingung für  $x_3$  erfüllt ist.

Die Gleitfläche  $\mathcal{S}_{A1}$ , deren Verlauf in Abbildung 17 gezeigt wird, sei durch

$$x_2 = \varphi_{A1}(\lambda) = \begin{cases} \psi(\lambda) & \text{für } \frac{{}^p\lambda - \lambda}{{}^p\lambda} > \frac{1}{2}, \\ \psi({}^p\lambda - \lambda) & \text{für } \frac{{}^p\lambda - \lambda}{{}^p\lambda} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (147)$$

bestimmt. Damit erreichen wir, dass die Kurve in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene die für das Bremsen wichtigen Eigenschaften hat und auch in der Parkposition eine waagerechte Tangente aufweist. Das ist notwendig, da bei  $x_2 = 0$  stets  $D = 0$  gilt.

Wenn wir, wie bereits in Abschnitt 5.1, den Exponenten  $\beta = 2.5$  festlegen, dann ist  $\mu$  der einzige Parameter, der die Gestalt der Gleitfläche beeinflusst. Qualitativ lässt sich dieser Einfluss folgendermaßen angeben: Für kleine Werte von  $\mu$  verläuft die Kurve nahe der  $\lambda$ -Achse, während sie für große Werte weiter in die  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene reicht. Die Nullstellen von  $\varphi_{A1}$  bei  ${}^p\lambda$  und 0, sowie die Extremstelle bei  ${}^p\lambda/2$  bleiben dabei unverändert;  $\mu$  skaliert die Schaltlinie nur in  $x_2$ -Richtung. Es lassen sich nun, ebenfalls qualitativ, Überlegungen zum Einfluss von  $\mu$  auf die Dynamik des Systems auf der Gleitfläche ausführen. Wenn die Schaltlinie nahe der  $\lambda$ -Achse verläuft, dann bleibt  $\dot{\lambda}$  relativ klein, und somit nimmt die Überbrückung der Distanz von der Ruhelage zur Parkposition eine große Zeit in Anspruch. Da aber  $|x_4|$  bei Annäherung an die Parkposition immer weiter steigt, steht nur ein begrenztes Zeitfenster zur Verfügung, bis  $x_3$  eine der Symmetriegrenzen aus Abschnitt 5.2 erreicht, und somit die Bewegung in umgekehrter Richtung abläuft.



**Abbildung 17:** Graphische Darstellung des Ansatzes für die Gleitfläche  $\mathcal{S}_{A1}$  (schematisch).

Der Parameter  $\mu$  kann mithin nicht beliebig klein gewählt werden. Andererseits ist auch klar, dass es für ihn eine obere Schranke geben muss, denn je größer die Werte für  $x_2$  auf der Gleitfläche werden, um so größer muss auch die Schulterbeschleunigung  $v$  sein, um das System auf dieser Kurve zu halten. Der Eingang  $v$  soll aber eine obere Grenze nicht überschreiten, was auch eine obere Grenze für  $\mu$  impliziert.

Nach diesen qualitativen Vorüberlegungen soll nun per Simulation gezeigt werden, dass es überhaupt möglich ist, mit dem Ansatz (147) das System aus einer Ruhelage in eine Parkposition zu überführen. Wir betrachten dafür zunächst den Fall  ${}^e x_3 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ . Aus Abbildung 11(c) entnehmen wir, dass dann im ersten Quadranten  $\sigma = -1$  gilt und somit das System von der  $x_2$ -Achse wegdriftet. Folglich wählen wir auch unter den beiden möglichen Parkpositionen diejenige auf dem Rand dieses Quadranten, d. h. die „obere“:

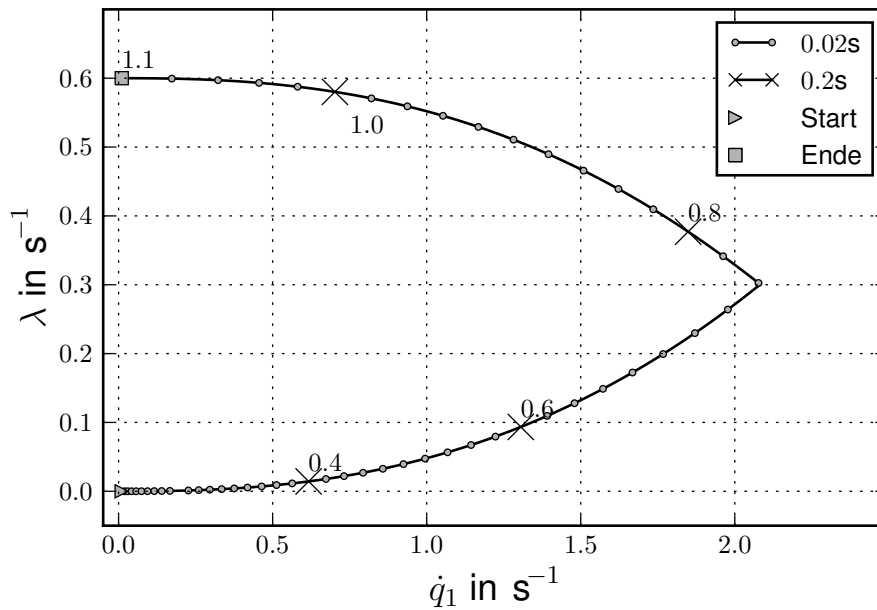
$${}^p \lambda := +|{}^p \lambda|. \quad (148)$$

Auf der Gleitfläche wird also eine Bewegung angestrebt, wie sie in Abbildung 19(a) dargestellt ist.

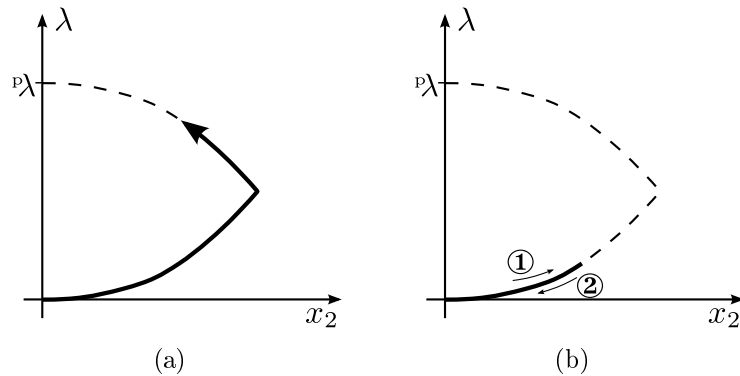
Die Durchführung der numerischen Simulation erfordert die Wahl konkreter Parameterwerte für die Gleitfläche. Neben der bereits in Abschnitt 5.1 getroffenen Wahl für  $\beta$  legen wir  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$  fest.

Führt man mit diesen Werten Simulationsläufe für verschiedene Startruhelagen mit  ${}^e x_3 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$  durch, so erkennt man, dass die Parkposition von einem großen Bereich aus dem Intervall tatsächlich erreicht werden kann. Exemplarisch wird dies in Abbildung 18 deutlich.





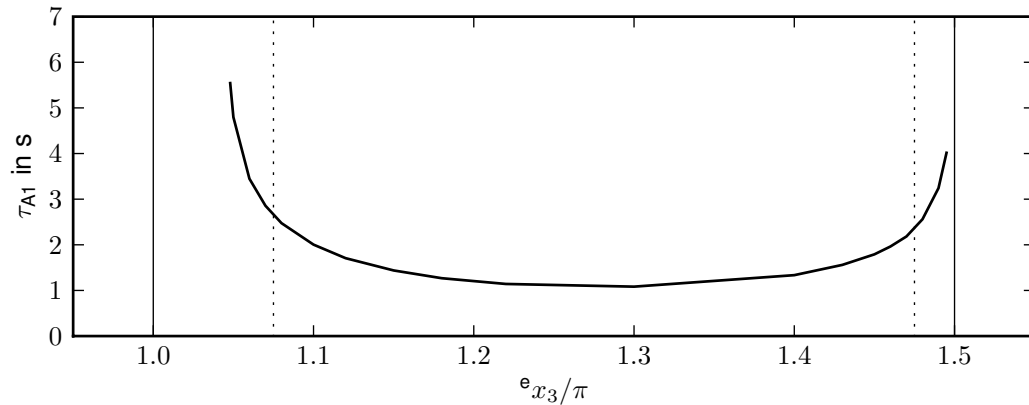
**Abbildung 18:** Simulierter Bewegungsablauf zur Überführung des Systems aus einer Ruhelage in eine Parkposition. Es gilt  ${}^e x_3 = 1.25\pi$ ,  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$ .



**Abbildung 19:** (a) Angestrebter prinzipieller Bewegungsablauf. (b) Problem bei  ${}^e x_3 \approx \pi$ . Das Vorzeichen von  $D$  kehrt sich während der Bewegung um, sodass die Parkposition nicht erreicht wird.

Allerdings bemerkt man durch derartige Simulationsuntersuchungen ebenfalls, dass in der Nähe der Intervallgrenzen die Bewegung nicht wie gewünscht abläuft: Wählt man  ${}^e x_3$  nahe der unteren Intervallgrenze  $\pi$ , kommt es während der Bewegung zu einer Unterschreitung dieser, sodass  $D$  sein Vorzeichen umkehrt und die angestrebte Parkposition nicht mehr erreichbar ist. Dieser problematische Fall ist in Abbildung 19(b) schematisch dargestellt.

Ein weiteres Resultat der Simulationsläufe geht aus Abbildung 20 hervor: Auch wenn die Parkposition aus einer Startruhelage erreicht werden kann, ist unter Umständen die dafür benötigte Zeit sehr groß. Das Problem tritt in den Randbereichen des Intervalls auf. In beiden Fällen ist der Betrag von  $D$  in der Anfangsphase des Manövers sehr klein, sodass die Bewegung viel Zeit in Anspruch nimmt.



**Abbildung 20:** Simulativ bestimmte Manöverdauer  $\tau_{A1}$  für  ${}^e x_3 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ . Bis auf  ${}^e x_3$  gelten die Parameterwerte aus Abbildung 18. Die senkrechten strichlierten Linien markieren die Grenzen des zulässigen Bereiches für  ${}^e x_3$ . Außerhalb ist auf der betrachteten Gleitfläche entweder gar keine Überführung in die Parkposition möglich oder die dafür benötigte Zeit ist zu groß.

Im größten Teil des Intervalls ist die Überführung aus der Ruhelage in die Parkposition jedoch in akzeptabler Zeit möglich. Dieser Teilbereich sei mit  $\mathcal{I}_3$  bezeichnet<sup>24</sup> und es gilt

$$\mathcal{I}_3 := \left( \pi + \varepsilon_1, \frac{3}{2}\pi - \varepsilon_2 \right), \quad (149)$$

wobei die positiven Konstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  entsprechend der willkürlich zu bestimmenden oberen Grenze für die Manöverdauer gewählt bzw. abgeschätzt werden können. Im Folgenden werden für diese beiden Parameter stets die Werte aus Abbildung 20,

$$\varepsilon_1 := 0.075\pi \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := 0.025\pi \quad (150)$$

benutzt, sodass sich eine obere Schranke für die Manöverdauer von  $\tau_{A1} \approx 2.5$  s ergibt.

<sup>24</sup> Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden die Intervalle  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  und  $\mathcal{I}_4$  ebenfalls eingeführt. Zu Beginn des nächsten Abschnitts sind alle vier dann übersichtlich zusammengefasst.

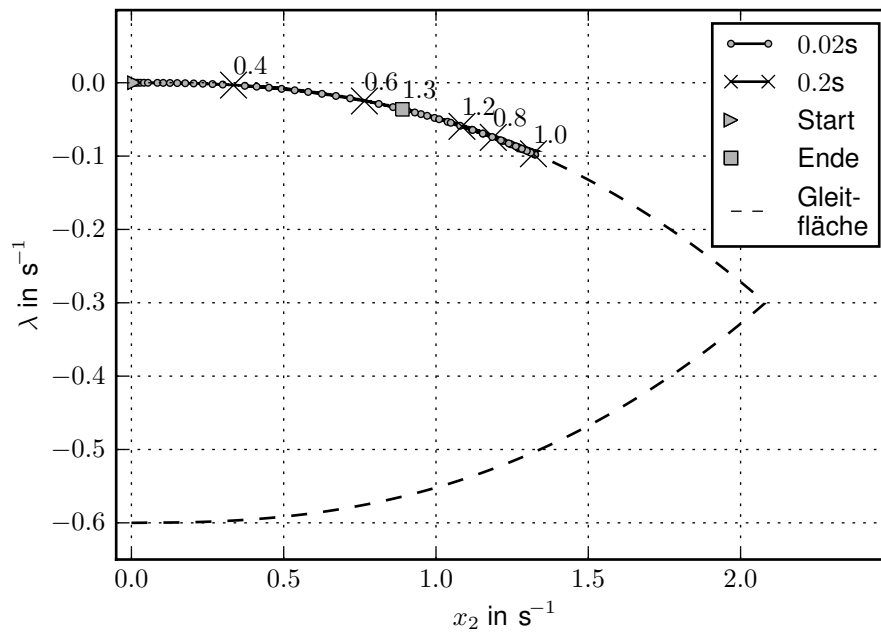
Wegen der in Abschnitt 5.2 durch Gleichung (142) ausgedrückten Quadrantenumkehr-Eigenschaft, können wir folgern, dass sich das System aus einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\frac{1}{2}\pi + \varepsilon_2, \pi - \varepsilon_1) =: \mathcal{I}_2$  in die untere Parkposition, überführen lässt, wenn eine analoge Gleitfläche  $\mathcal{S}_{A\bar{I}}$  im dritten Quadranten genutzt wird. Diese lässt sich mit  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$  durch  $\varphi_{A\bar{I}}(\lambda) := -\varphi_{A\bar{I}}(\lambda)$  festlegen.

Weiterhin folgt aus der Zeitumkehr-Eigenschaft, dass die Durchführung von Manöver D, also das Abbremsen in eine entsprechende Ruhelage ausgehend von der Parkposition, ebenfalls auf den Gleitflächen  $\mathcal{S}_{A\bar{I}}$  bzw.  $\mathcal{S}_{A\bar{I}}$  möglich ist. Konkret hat man  $\varphi_{D\bar{I}}(\lambda) := \varphi_{A\bar{I}}(\lambda)$  und  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$  zu wählen, wenn eine Gleichgewichtslage mit  ${}^e x_3 \in \mathcal{I}_3$  erreicht werden soll. Umgekehrt ist für eine Zielruhelage mit  ${}^e x_3 \in \mathcal{I}_2$  die folgende Wahl zu treffen:  $\varphi_{D\bar{I}}(\lambda) := \varphi_{A\bar{I}}(\lambda)$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$ . Wenn nun noch Ruhelagen mit  $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi) \ni {}^e x_3 \notin \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$  als unzulässig erklärt werden, dann ist mit dem bisher beschriebenen Ansatz für die Manöver A und D die Hälfte aller auftretenden Fälle bereits abgedeckt.

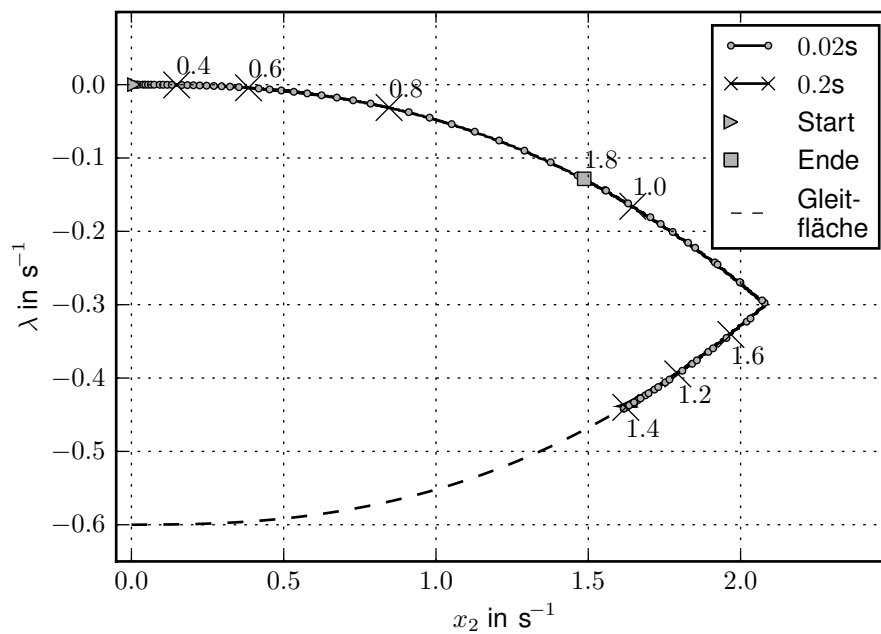
Die andere Hälfte lässt sich darauf zurückführen, aus einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  eine Parkposition zu erreichen. Wiederum ist es zweckmäßig, aus Abbildung 11(d) denjenigen Quadranten herauszusuchen, in welchem das System von der  $x_2$ -Achse wegdriftet. Die Wahl fällt mithin auf den vierten Quadranten.

Eine naheliegende Herangehensweise ist es nun, den obigen Ansatz erneut zu benutzen, d. h. mit  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$  die zusammengesetzte Gleitfläche in den vierten Quadranten zu positionieren und durch Simulationsläufe mit verschiedenen Werten für  ${}^e x_3$  aus dem Intervall  $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  zu überprüfen, ob die beabsichtigte Bewegung realisiert wird.

Das ernüchternde Ergebnis einer solchen Untersuchung zeigt Abbildung 21 für zwei ausgewählte Startruhelagen. Auch für andere Werte von  ${}^e x_3$  kann die angestrebte Parkposition so nicht erreicht werden. Die Ursache lässt sich durch eine qualitative Überlegung recht schnell erfassen: Bei starker Trägheitskopplung verläuft die Gerade, auf der  $x_4 = 0$  gilt, durch den ersten und dritten Quadranten der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene, denn der Anstieg dieser Geraden in der betrachteten Ebene ist nach Abbildung 10 durch  $-\kappa = 1 + \eta \cos x_3$  gegeben. Daraus folgt, dass im betrachteten  $x_3$ -Intervall die Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit im offenen vierten Quadranten überall kleiner null ist. Deshalb wird  $x_3$  während der Bewegung immer kleiner, sodass  $D$  schließlich das Vorzeichen wechselt und sich die Bewegungsrichtung auf der Gleitfläche umkehrt. Zwar ist dieses Problem für  ${}^e x_3 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$  ebenfalls aufgetreten, jedoch nur nahe der unteren Intervallgrenze. Der Grund für den Unterschied liegt darin, dass die Bewegung auf der Gleitfläche im ersten Quadranten in der Nähe der  $x_4=0$ -Geraden abließ. Im vierten Quadranten jedoch impliziert das Erreichen der Parkposition auf dem beabsichtigten Weg zwischenzeitlich größere Ellenbogenwinkelgeschwindigkeiten. Für eine heuristische Bewegungsplanung ist die La-



(a)



(b)

**Abbildung 21:** Simulierte Bewegungsabläufe auf  $\mathcal{S}_{A1}$  für  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ ,  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$ . Beide Abbildungen zeigen die Trajektorie in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. (a) Trajektorie für  ${}^e x_3 = 1.7\pi$ ,  $t \in [0, 1.3 \text{ s}]$ . (b) Trajektorie für  ${}^e x_3 = 1.9\pi$ ,  $t \in [0, 1.8 \text{ s}]$ .

ge der Gleitfläche in Bezug zur  $x_4=0$ -Geraden also ein nicht zu unterschätzender Einflussfaktor, denn in ihrer Nähe ändern sich  $x_3$  und damit die Driftverhältnisse nur langsam.

Für das Problem der Überführung aus einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  in eine Parkposition heißt dies, dass man ebenfalls versuchen könnte, einen Weg durch den ersten oder dritten Quadranten auszuwählen. Dies soll im folgenden geschehen. Wie sich mittels Simulationsversuchen feststellen lässt, tritt dabei der Fall, dass die Bewegung in einer Ruhelage des  $x_3$ - $\lambda$ -Teilssystems<sup>25</sup> zum Erliegen kommt, nicht auf.

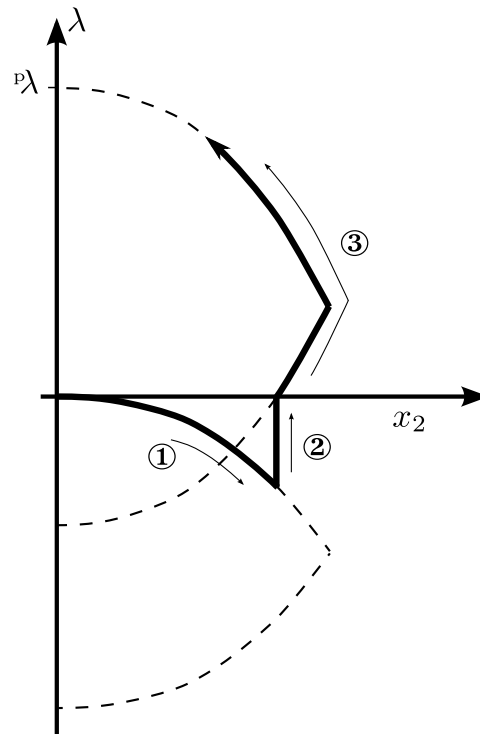
Zu Beginn der Bewegung liegen die angestrebten Driftverhältnisse, d. h.  $\sigma = -1$ , zwar im vierten Quadranten vor, wie wir gesehen haben, ändert sich dies jedoch recht schnell: Wenn  $x_3$  zu klein wird<sup>26</sup>, wechselt das Vorzeichen von  $D$  von „-“ nach „+“. Wird das System durch die Regelung dann weiter auf der Gleitfläche stabilisiert, strebt es erneut in Richtung des Koordinatenursprungs. Was aber, wenn der Eingang  $v$  in diesem Moment auf Null gesetzt wird? Dann führt die Drift das System in Richtung der  $x_2$ -Achse und auch über diese hinaus in den ersten Quadranten. Der Vorzeichenwechsel der Drift impliziert, dass der Ellenbogenwinkel dann kleiner als  $\frac{3}{2}\pi$  ist, sodass eine Gleitfläche, ähnlich der in Abbildung 17, das System durch den ersten Quadranten in die obere Parkposition führen könnte. Allerdings ist der Beginn der Bewegung in diesem Fall nicht der Koordinatenursprung, sondern ein anderer Punkt auf der  $x_2$ -Achse. Die Schaltlinie kann jedoch problemlos in  $\lambda$ -Richtung derart skaliert werden, dass sie durch eben diesen Punkt verläuft. Mit dem Überschreiten der  $x_2$ -Achse kann das System mithin auf dieser neuen Gleitfläche stabilisiert werden, sodass es sich nun im ersten Quadranten auf die Parkposition zu bewegt. Abbildung 22 veranschaulicht diesen Ansatz schematisch.

Um zu vermeiden, dass sich das System bereits wieder der  $\lambda$ -Achse nähert wenn sich die Drift umkehrt und sich deshalb eine Bewegung wie in Abbildung 23(a) ergibt, kann man die erste Gleitfläche geeignet anpassen: Statt für diese nach Gleichung (147) eine Kurve vom Ursprung in die untere Parkposition anzusetzen, wird eine Kurve gewählt, die sich aus  $\psi(\lambda)$  und einer senkrechten Gerade zusammensetzt:

$$\varphi_{A2a}(\lambda) = \min(\psi(\lambda), \bar{x}_2). \quad (151)$$

<sup>25</sup> In Abschnitt 5.2 wurden diese Ruhelagen bestimmt.

<sup>26</sup> Der genaue Wert hängt davon ab, wie weit die Bewegung auf der Schaltlinie schon fortgeschritten ist.



**Abbildung 22:** Schematische Darstellung einer Bewegung aus einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$  in die Parkposition. Die Bewegung erfolgt in drei Schritten. In Schritt ① wird das System auf einer Gleitfläche stabilisiert, welche aus dem Ursprung in die untere Parkposition führt. Im Moment des Vorzeichenwechsels von  $D$ , beginnt Schritt ②: Das System driftet bei verschwindendem Eingang in Richtung des ersten Quadranten. Dabei gilt  $x_2 = \bar{x}_2 = \text{const.}$ . Bei Überschreiten der  $x_2$  Achse wird eine Gleitfläche derart bestimmt, dass sie durch den Punkt  $(\bar{x}_2, 0)$  in die obere Parkposition verläuft. Dann startet Schritt ③. Dabei wird das System auf der neuen Gleitfläche stabilisiert und bewegt sich auf dieser in Richtung der oberen Parkposition.

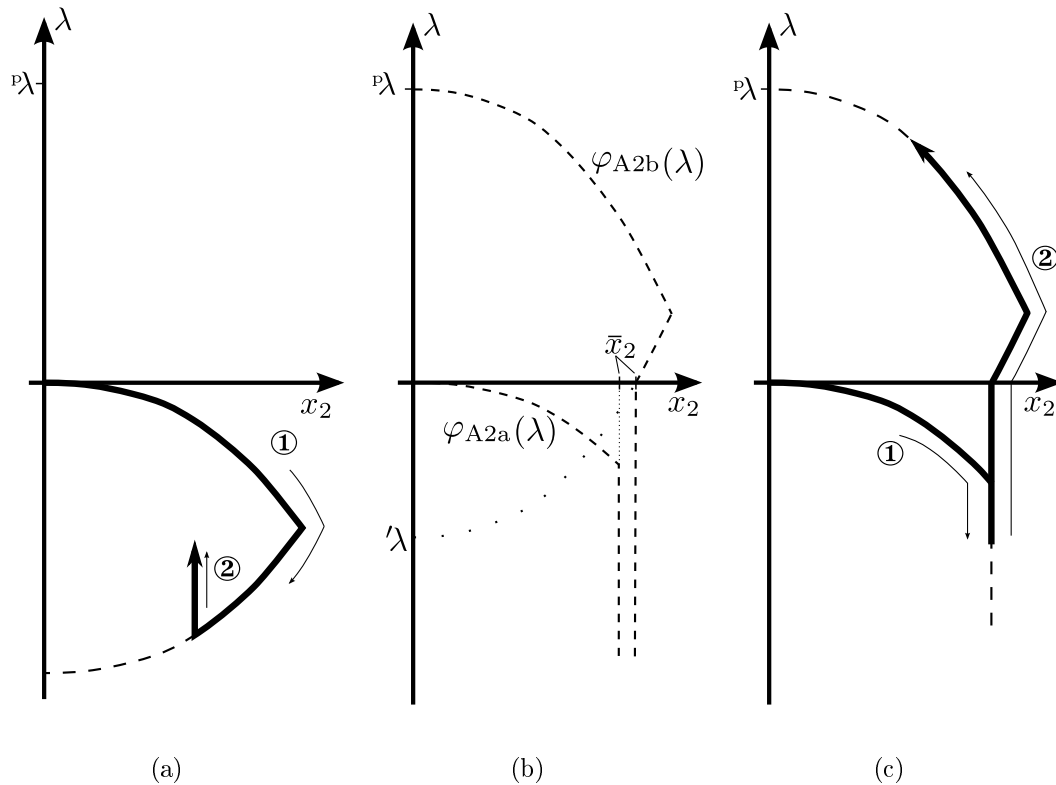
Dazu passend wird die zweite Schaltlinie konstruiert:

$$\varphi_{A2b}(\lambda) = \begin{cases} \psi({}^p\lambda - \lambda) & \text{für } \frac{{}^p\lambda - \lambda}{{}^p\lambda - \lambda} \leq \frac{1}{2}, \\ \psi({}'\lambda - \lambda) & \text{für } \frac{{}^p\lambda - \lambda}{{}^p\lambda - \lambda} > \frac{1}{2} \wedge \lambda \geq 0, \\ \bar{x}_2 & \text{für } \lambda < 0. \end{cases} \quad (152)$$

Dabei stellt  $'\lambda$  eine Hilfsgröße dar, die genau so bestimmt wird, dass

$$\psi({}'\lambda) = \bar{x}_2 \quad (153)$$

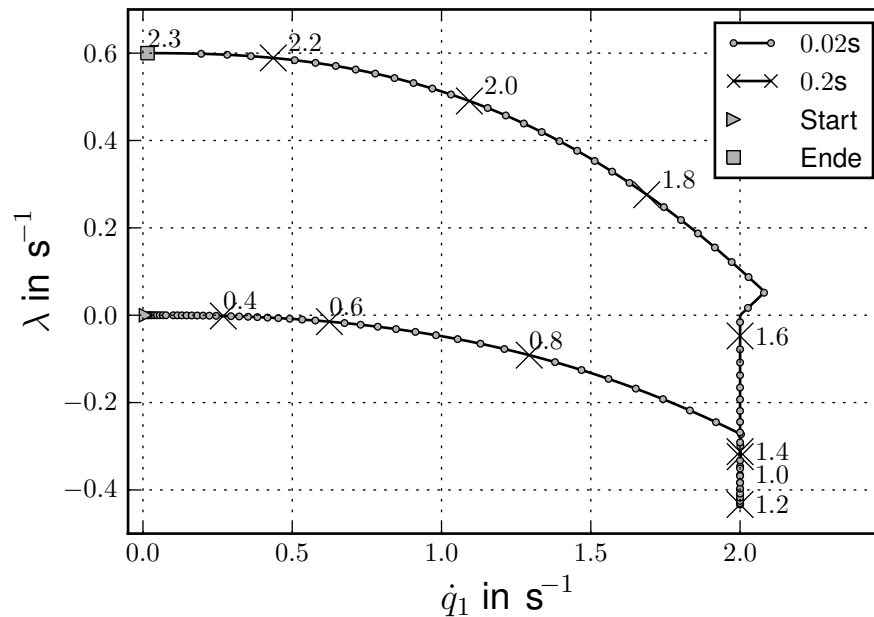
und damit automatisch  $\varphi_{A2b}(0) = \bar{x}_2$  gilt. Beide Gleitflächen  $\mathcal{S}_{A2a}$  und  $\mathcal{S}_{A2b}$  sind in



**Abbildung 23:** (a) Unerwünschter Bewegungsablauf für bestimmte Werte von  ${}^e x_3$ . (b) Angepasste Gleitflächen um dies zu verhindern. Die Darstellung weist, wegen der besseren Erkennbarkeit, einen Versatz in  $x_2$ -Richtung zwischen den jeweiligen linearen Abschnitten auf, der im Ansatz (151, 152) nicht enthalten ist, d. h. der Parameter  $\bar{x}_2$  hat für  $\varphi_{A2a}$  und  $\varphi_{A2b}$  den gleichen Wert. (c) Zu Abbildung 22 analoger Bewegungsablauf auf den Gleitflächen  $S_{A2a}$  und  $S_{A2b}$ . Der Wechsel der „aktiven“ Gleitfläche erfolgt mit dem Wechsel des Vorzeichens von  $D$ .

Abbildung 23(b) dargestellt. Abbildung 23(c) zeigt den sich dann ergebenden prinzipiellen Bewegungsablauf. Der Wert von  $\bar{x}_2$  kann bestimmt werden, indem man das Minimum aus dem  $x_2$ -Wert, bei dem  $D$  sein Vorzeichen ändert und aus einem oberen Schranken-Wert nimmt. Es ist also zu Beginn der Bewegung noch nicht ohne weiteres klar, ob der lineare Teilbereich von  $\varphi_{A2a}$  in Anspruch genommen wird. Dies hängt vom  $x_3$ -Wert am Anfang des Manövers ab.

Unsere Argumentation war bisher wiederum ausschließlich qualitativer Natur. Dass sich das Konzept umsetzen lässt, kann man mittels Simulationen zeigen. Exemplarisch ist in Abbildung 24 die aus einer numerischen Berechnung erhaltene Trajektorie dargestellt. Die obere Schranke für  $\bar{x}_2$  wurde mit  $2.0 \text{ s}^{-1}$  festge-



**Abbildung 24:** Simulierte Bewegung auf  $\mathcal{S}_{A2a}$  und  $\mathcal{S}_{A2b}$ . Es gilt  ${}^e x_3 = 1.9\pi$ ,  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$ .

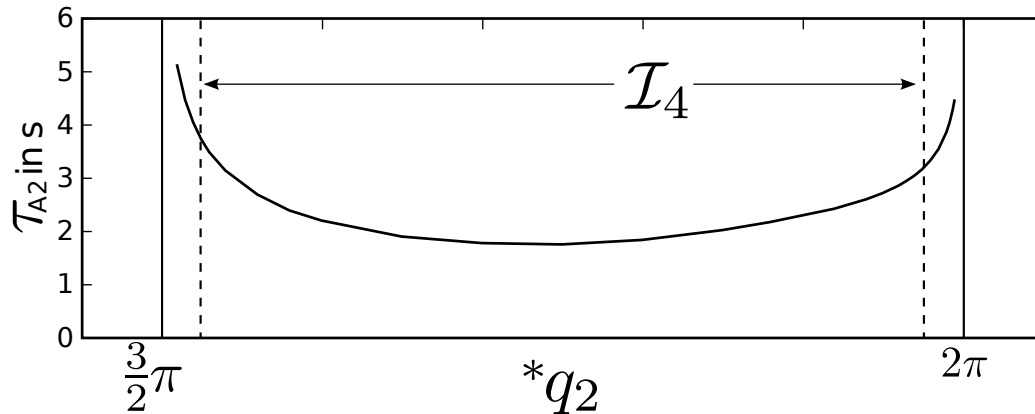
legt, weiterhin wurde  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$  verwendet. Daraus ergibt sich  $\lambda = -0.496 \text{ s}^{-1}$ . Wie zu erkennen, verläuft die Bewegung zeitweise auf dem linearen Zweig von  $\varphi_{A2a}$ . Sie entspricht damit der in Abbildung 23(c) ausgedrückten Überlegung.

Aus Abbildung 25 kann entnommen werden, dass bei Einhaltung eines Abstandes von  $\varepsilon_2$  zu den Grenzen des betrachteten Intervalls für  ${}^e x_3$  die Durchführung des Manövers in akzeptabler Zeit möglich ist, wobei die Festlegung dieses Abstandes willkürlich erfolgt, sodass sich  $\tau_{A2} \approx 3.5 \text{ s}$  ergibt.

Das Problem der Überführung aus einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi + \varepsilon_2, 2\pi - \varepsilon_2) =: \mathcal{I}_4$  in eine Parkposition kann mithin als gelöst betrachtet werden. Analog zu obengesagtem können wir daraus unter Verweis auf die Symmetrie-Eigenschaften des Systems schlussfolgern, dass auf die gleiche Art die untere Parkposition ausgehend von einer Ruhelage mit  ${}^e x_3 \in (\varepsilon_2, \frac{1}{2}\pi - \varepsilon_2) =: \mathcal{I}_1$  erreicht werden kann. Dazu werden die durch  $\varphi_{A\bar{2}a}(\lambda) := -\varphi_{A2a}(-\lambda)$  und  $\varphi_{A\bar{2}b}(\lambda) := -\varphi_{A2b}(-\lambda)$  gebildeten Gleitflächen  $\mathcal{S}_{A\bar{2}a}$  und  $\mathcal{S}_{A\bar{2}b}$  benötigt, auf denen dann bei  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$  eine Bewegung aus dem Koordinatenursprung der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene in die untere Parkposition abläuft.

Eine weitere, ebenfalls zu oben analoge Konsequenz betrifft Manöver D: Um Ruhelagen zu *erreichen*, in denen  ${}^e x_3 \in \mathcal{I}_1$  gilt, können in Verbindung mit  ${}^p \lambda = +0.6 \text{ s}^{-1}$  Gleitflächen genutzt werden, die durch  $\varphi_{D\bar{2}a}(\lambda) := \varphi_{A2a}(\lambda)$  und  $\varphi_{D\bar{2}b}(\lambda) :=$





**Abbildung 25:** Simulativ ermittelte Manöverdauer  $\tau_{A2}$  für  ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ . Für die Gleitflächen wurde  $\mu = 8.33$  und  ${}^p \lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$  verwendet. Die Werte für  $\bar{x}_2$  und  $\lambda$  ergeben sich dann jeweils aus den einzelnen Bewegungsabläufen. Als obere Grenze von  $\bar{x}_2$  wurde der Wert  $2 \text{ s}^{-1}$  festgelegt. Die senkrechten strichlierten Linien markieren wie in Abbildung 20 die Grenzen des zulässigen Bereiches.

$\varphi_{A2b}(\lambda)$  gegeben sind. Für Ruhelagen mit  ${}^e x_3 \in \mathcal{I}_4$  lautet die entsprechende Wahl  ${}^p \lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varphi_{D2a}(\lambda) := \varphi_{A2a}(\lambda)$  und  $\varphi_{D2b}(\lambda) := \varphi_{A2b}(\lambda)$ .

Abschließend seien Gleichgewichtslagen mit  $[0, \frac{1}{2}\pi] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \ni {}^e x_3 \notin \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_4$  als unzulässig erklärt, denn der vorgestellte Ansatz erweist sich als ungeeignet, sowohl um derartige Ellenbogenstellungen zu erreichen als auch um sie zu verlassen. Weiterhin sei angemerkt, dass mit Manöver D für zulässige Werte von  ${}^e x_3$  zwar stets eine Ruhelage erreicht werden kann, diese jedoch i. A. von der angestrebten leicht abweicht. Während des Manövers werden durch den Gleitregime-Regler nur die Größen  $x_2$  und  $\lambda$  berücksichtigt. Auf Abweichungen der Winkelgrößen, von ihrem Sollverlauf kann mit dieser Regelung nicht reagiert werden. Mithin wird durch Manöver D nur  $(V, 0, V, V) \rightarrow (I, 0, I, 0)$  realisiert. Bei der für alle Simulationen verwendeten Abtastzeit von  $0.001 \text{ s}$  sind die durch dieses Manöver verursachten Abweichungen beider Gelenkwinkel am Ende der Bewegung jedoch gering, d. h. kleiner als  $2^\circ$ . Aus dem vorher stattfindenden Manöver C resultieren allerdings zusätzliche Abweichungen für  $x_1$ , wie sich in Abschnitt 5.6 zeigen wird.

Damit haben wir also, aufbauend auf qualitativen Überlegungen und untermauert mit Simulationsergebnissen, für die Manöver A und D alle auftretenden Fälle für  ${}^e x_3$  diskutiert. Wir haben zum einen eine Möglichkeit gefunden, aus einer sehr großen Menge von Ruhelagen eine der beiden angestrebten Parkpositionen zu erreichen. Zum anderen können wir nun das System ausgehend von einer dieser Parkpositionen in eine Ruhelage steuern, die sehr nahe an einer gegebenen Ruhela-

ge aus dieser Menge liegt. Besagte Menge umfasst dabei alle Gleichgewichtslagen, für die bei beliebigem  $x_1$

$${}^e x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4 \quad (154)$$

gilt. In Worten bedeutet das nichts anderes, als dass am Anfang und am Ende der Bewegung die Vorgabe des Ellenbogenwinkels „nicht zu nahe“ an denjenigen Stellungen liegen darf, die durch wiederholte viertel Drehungen, ausgehend von der Null-Lage des Unterarms, gebildet werden.

Mit diesem Ergebnis ist der schwierigste Teil der Planung der Punkt-zu-Punkt-Bewegung bereits gelöst. Die zwei folgenden Abschnitte werden, wie angekündigt, die Überführung einer Parkposition in die andere und die Überführung des Schulterwinkels behandeln.

## 5.5 Manöver B: Überführung der Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wird ein Manöver beschrieben, welches die Teilaufgabe  $(F,0,V,V) \rightarrow (F,0,F,V)$  löst. Offensichtlich geht es darum, die Ellenbogenwinkelgeschwindigkeit zu beeinflussen. Aus den vorangegangenen Ausführungen können wir eine Bedingung für die Notwendigkeit einer Überführung von  ${}^p \lambda$  nach  $-{}^p \lambda$  herauskristallisieren. Wir nehmen dazu an, dass der Ellenbogenwinkel in der Ausgangsruhelage den Wert  ${}^* x_3$  und in der Zielruhelage den Wert  ${}^\dagger x_3$  habe. Weiterhin bezeichnen wir die Parkposition, welche aus der Startruhelage angesteuert wird mit  ${}^p \lambda$  und diejenige, aus der das Bremsmanöver eingeleitet wird, als  ${}^\dagger \lambda$ . Wir fassen zunächst aus dem vorigen Abschnitt die Bedingungen zusammen, die festlegen, ob die obere oder die untere Parkposition für das Start- bzw. Bremsmanöver benötigt wird:

$${}^* x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \Rightarrow {}^p \lambda < 0, \quad (155a)$$

$${}^* x_3 \in \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4 \Rightarrow {}^p \lambda > 0, \quad (155b)$$

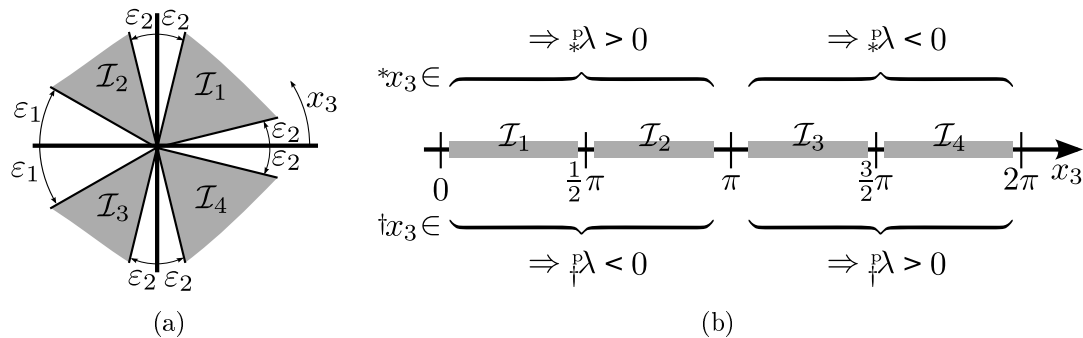
$${}^\dagger x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \Rightarrow {}^\dagger \lambda > 0, \quad (155c)$$

$${}^\dagger x_3 \in \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4 \Rightarrow {}^\dagger \lambda < 0. \quad (155d)$$

Abbildung 26 verdeutlicht diese Beziehungen. Das  $x_4$ -Überführungsmanöver muss folglich genau dann stattfinden, wenn eine der beiden Bedingungen

$${}^* x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \wedge {}^\dagger x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2, \quad (156a)$$

$${}^* x_3 \in \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4 \wedge {}^\dagger x_3 \in \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4 \quad (156b)$$



**Abbildung 26:** (a): Lage der Intervalle für zulässige Werte von  ${}^e x_3$ . (b): Zusammenhang zwischen dem Ellenbogenwinkel in der Ruhelage und dem sich daraus ergebenden Vorzeichen von  ${}^p \lambda$ . Oben:  ${}^p \lambda$  nach dem Beschleunigungsmanöver. Unten:  ${}^p \lambda$  vor dem Bremsmanöver. Die Teilabbildung (b) gibt die Aussagen der Beziehungen (155) wieder.

zutrifft, d. h. wenn  ${}^* \lambda \neq \dagger \lambda$  gilt.

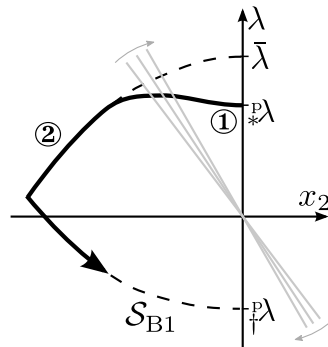
Aus Symmetrie-Gründen können wir uns darauf beschränken, das Manöver von der oberen in die untere Parkposition zu planen. Aus Abbildung 11 entnehmen wir, dass egal ob die Bewegung durch die linke oder durch die rechte Halbebene der  $x_2$ - $\lambda$ -Darstellung verläuft, für alle  $x_3$ -Intervalle ein Vorzeichenwechsel von  $D$  stattfinden wird. Mit anderen Worten: Während der Bewegung muss die Nulldriftgerade überquert werden. Dieser Umstand verhindert den Ansatz, eine Gleitfläche von der oberen in die untere Parkposition vorzugeben und die Überführung darauf ablaufen zu lassen. Wir wandeln diesen Ansatz nun derart ab, dass ihm kein offensichtliches Argument entgegensteht und unterziehen ihn dann, wie üblich, einer simulativen Prüfung.

Wenn die Nulldriftgerade nicht auf einer Gleitfläche überquert werden kann, so kann sie doch problemlos durch eine bloße Vorgabe des Eingangs  $v$ , also durch reine Steuerung, überwunden werden. Je nachdem, ob die Bewegung in der linken oder rechten Halbebene stattfindet, und bei welchem Wert von  $x_3$  das Manöver startet<sup>27</sup>, könnte diese Steuerungsphase am Anfang oder am Ende der Bewegung liegen. Letztere Variante ist dabei eindeutig die schlechtere, denn durch reine Steuerung ist nicht vorhersagbar, bei welchem  $\lambda$ -Wert die  $\lambda$ -Achse erreicht wird.

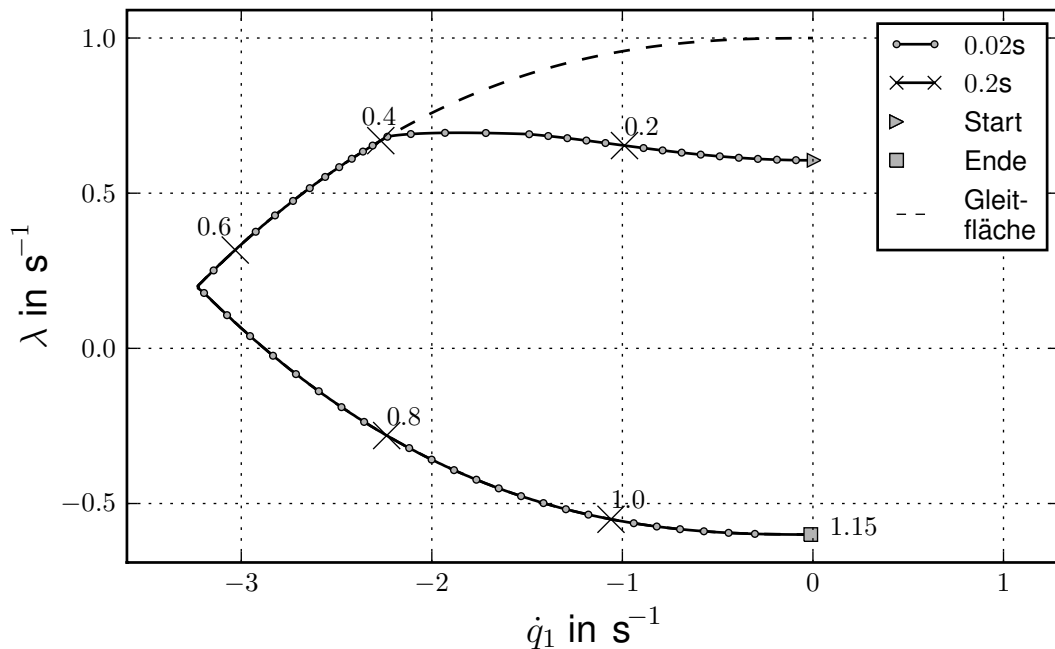
Die Phase der Steuerung am Anfang der Bewegung durchzuführen, scheint jedoch unproblematisch zu sein. Sobald die Nulldriftgerade inklusive eines zusätzlichen „Sicherheitsabstandes“<sup>28</sup> überwunden ist, kann das System auf einer Gleit-

<sup>27</sup> Da der Ausgangspunkt des Manövers die Parkposition ist, kann der Startwert von  $x_3$  beliebig gewählt werden.

<sup>28</sup> Die Größen  $x_2$  und  $\lambda$  sind von ihrer physikalischen Dimension natürlich Winkelgeschwindigkeiten, jedoch bietet sich die Bezeichnung hier an.



**Abbildung 27:** Prinzipieller Bewegungsablauf bei der Überführung des Systems von der oberen in die untere Parkposition. Die grauen Geraden symbolisieren die Nulldriftgerade, deren Anstieg sich im Laufe der Bewegung verändert. Die Bewegung kann in zwei Phasen unterteilt werden: In Phase ① wird mit konstantem Eingang  $v$  der Sektor mit  $D > 0$  überwunden. Nach Überquerung der Nulldriftgerade und der Überwindung eines zusätzlichen Abstandes zu dieser beginnt Phase ②, in der das System auf der Gleitfläche  $\mathcal{S}_{B1}$  stabilisiert wird. Der obere Schnittpunkt der Schaltlinie mit der  $\lambda$ -Achse,  $\bar{\lambda}$ , liegt deutlich oberhalb von  $\overset{p}{\lambda}$ , während der untere genau mit  $\overset{u}{\lambda}$  übereinstimmt.



**Abbildung 28:** Simulierter Bewegungsablauf der Überführung von der oberen Parkposition ( $\overset{p}{\lambda} = 0.6 \text{ s}^{-1}$ ) in die untere ( $\overset{u}{\lambda} = -0.6 \text{ s}^{-1}$ ). Das Manöver startet bei  $*x_3 = \frac{\pi}{2}$ . Außerdem gilt  $\bar{\lambda} = 1 \text{ s}^{-1}$  und  $\mu = 9.375$ .

fläche stabilisiert werden, welche in die untere Parkposition führt. Dieses Konzept ist in Abbildung 27 gezeigt. Zur Beschreibung einer entsprechenden Schaltlinie kann

$$\varphi_{B1}(\lambda) := \begin{cases} \psi(\bar{\lambda} - \lambda) & \text{für } \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\lambda - \overset{p}{\dagger}\lambda} \leq \frac{1}{2}, \\ \psi(\overset{p}{\dagger}\lambda - \lambda) & \text{für } \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\lambda - \overset{p}{\dagger}\lambda} > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{mit } |\bar{\lambda}| > |\overset{p}{*}\lambda|. \quad (157)$$

herangezogen werden.

Vor dem Hintergrund, dass im zweiten Quadranten der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene bei starker Trägheitskopplung<sup>29</sup> stets  $x_4 > 0$  gilt, bietet sich nach Abbildung 11(b) für das Manöver ein  $x_3$ -Startwert von  $\frac{1}{2}\pi$  an. Wenn  $x_3$  dann nämlich weiter wächst, liegen die beabsichtigten Driftverhältnisse vor. Das in Abbildung 28 dargestellte Simulationsergebnis, bestätigt, dass das Manöver wie geplant durchführbar ist. Die verwendeten Parameterwerte betragen:  $\bar{\lambda} = 1 \text{ s}^{-1}$  und  $\overset{p}{\dagger}\lambda = -0.6 \text{ s}^{-1}$ .

Um eine Überführung von der unteren in die obere Parkposition zu erzielen, kann für den Startwert  $\overset{*}{x}_3 = \frac{3}{2}\pi$  aufgrund der Quadrantenumkehr-Eigenschaft aus Abschnitt 5.2 ein vergleichbares Manöver durch den vierten und ersten Quadranten ausgeführt werden. Dafür kann die Schaltlinie mit  $\varphi_{B\bar{1}}(\lambda) := -\varphi_{B1}(\lambda)$  beschrieben werden, wobei die Parameterwerte  $\bar{\lambda} = -1 \text{ s}^{-1}$  und  $\overset{p}{\dagger}\lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$  zu wählen sind.

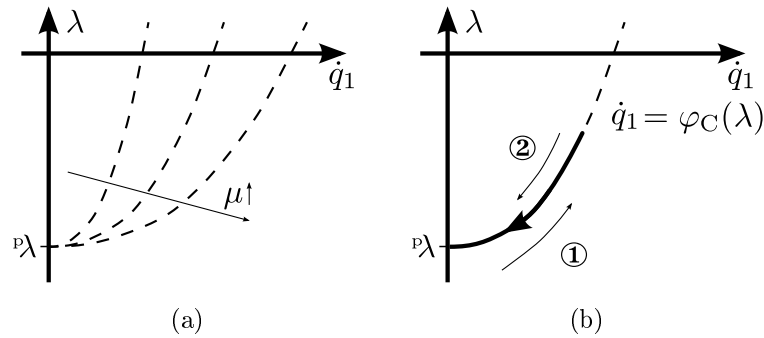
## 5.6 Manöver C: Überführung des Schulterwinkels

Die letzte zu behandelnde Klasse von Manövern soll das Teilproblem  $(F,0,V,V) \rightarrow (V,0,F,V)$  lösen, um den Oberarmwinkel derart zu beeinflussen, dass er nach dem sich anschließenden Bremsmanöver den gegebenen Wert der Zielruhelage annimmt. Die Veränderung von  $x_1$  während des Bremsens ist dabei im Voraus bekannt. Das  $x_1$ -Überführungsmanöver muss darüberhinaus in einer Parkposition sowohl beginnen als auch enden.

Die in Abschnitt 5 skizzierte Idee für dieses Manöver bestand darin, die Wiederkehr-Eigenschaft des Systems zu nutzen. Es soll also eine Bewegung auf einer Gleitfläche stattfinden, während der die Funktion  $\sin x_3$  und damit  $D$  ihr Vorzeichen wechselt. Wir werden diese Idee nun für die untere Parkposition näher diskutieren

Die Wahl einer geeigneten Gleitfläche lässt viele Freiheiten. Aus den bisher gemachten Erfahrungen lässt sich schließen, dass ein auf der Potenzfunktion  $\psi(\lambda)$  basierender Ansatz durchaus aussichtsreich ist. Als nächstes gilt es eine Entscheidung bezüglich des Vorzeichens von  $x_2$  zu treffen: Soll die Bewegung in positive oder negative Richtung von  $x_1$  laufen, oder ggf. in beide? Negative  $x_2$  hätten zur Folge, dass die Gleitfläche, ausgehend von der unteren Parkposition zunächst durch den

<sup>29</sup> In der Einleitung des Kapitels wurde  $\eta = 0.9$  festgelegt.



**Abbildung 29:** (a) Schematische Darstellung der Gleitfläche  $\mathcal{S}_{C1}$  für verschiedene Werte des Parameters  $\mu$ . Mit steigendem Wert liegt die Kurve weiter rechts. (b) Prinzipieller Bewegungsablauf auf der Gleitfläche, wenn das Manöver bei  $x_3 = \frac{\pi}{2}$  beginnt. Zunächst erfolgt in Phase ① eine Bewegung aus der Parkposition entlang der durch  $x_2 - \varphi_{C1}(\lambda) = 0$  festgelegten Kurve in positive  $\lambda$ -Richtung. Dabei verringert sich  $x_3$  immer weiter, sodass schließlich  $D$  das Vorzeichen wechselt, und das System in Phase ② auf der selben Kurve zurück in die Parkposition gleitet.

dritten Quadranten verlaufen würde – und damit in der Nähe der  $x_4=0$ -Geraden. Dies jedoch kann zwei unerwünschte Konsequenzen haben: Entweder kann die Bewegung sehr lange dauern, wenn nämlich die Gleitfläche diese Gerade in der Nähe der Ruhelage des  $x_3$ - $\lambda$ -Teilssystems schneidet. Oder es kann zum Fall sehr großer Beträge von  $x_2$  kommen, wenn die Gleitfläche nahezu parallel zur  $x_4 = 0$ -Geraden verläuft. Qualitativ ähnelt dies dann dem Fall endlicher Fluchtzeit. Beide Probleme wurden in Abschnitt 5.2 beleuchtet. Ihr konkretes Auftreten hängt natürlich von den Startbedingungen und der Lage der jeweiligen Gleitfläche ab.

Um beide Effekte von vornherein zu vermeiden, wird die positive  $x_2$ -Richtung gewählt. Die nächste Entscheidung betrifft mögliche  $x_3$ -Startwerte für das Manöver und wegen der davon abhängigen Driftverhältnisse die  $\lambda$ -Richtung, in welche die Bewegung am Anfang abläuft. Schon im Abschnitt 5.1 hatten wir festgestellt, dass für  $x_3 = \frac{\pi}{2}$  die Drift im kompletten offenen vierten Quadranten positiv ist. Ein intuitiver Ansatz ist es also, für diesen Startwert des Ellenbogens, die Gleitfläche  $\mathcal{S}_{C1}$  mit

$$\varphi_{C1}(\lambda) := \psi(p\lambda - \lambda) \quad (158)$$

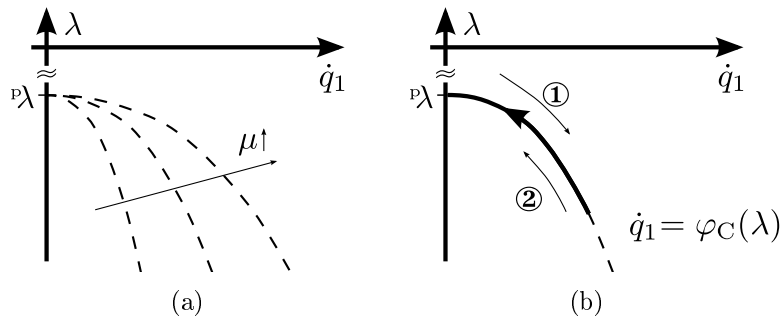
anzusetzen, deren Verlauf in Abbildung 29(a) für verschiedene Werte des Parameters  $\mu$  dargestellt ist. Die sich einstellende Bewegung ist in Abbildung 29(b) schematisch gezeigt.

Aus der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Wiederkehr-Eigenschaft lässt sich ableiten, dass der Wert von  $x_3$ , bei dem eine derartige Bewegung die Parkposition wieder erreicht, symmetrisch zum Startwert von  $x_3$  liegt. Beginnt die Bewegung

also mit  $x_3 = \frac{\pi}{2}$ , so endet sie bei  $-\frac{\pi}{2}$ . Im von uns betrachteten Intervall entspricht dies dem Wert  $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ . Für diesen Ellenbogenwinkel ist im offenen ersten Quadranten das Vorzeichen von  $D$  überall negativ, sodass direkt anschließend ein analoges Manöver auf einer in negative  $\lambda$ -Richtung gekrümmten Gleitfläche  $\mathcal{S}_{C2}$  durchführbar ist. Wegen der Betragsbildung in  $\psi$  kann dafür ebenfalls

$$\varphi_{C2}(\lambda) := \psi(p\lambda - \lambda) \quad (159)$$

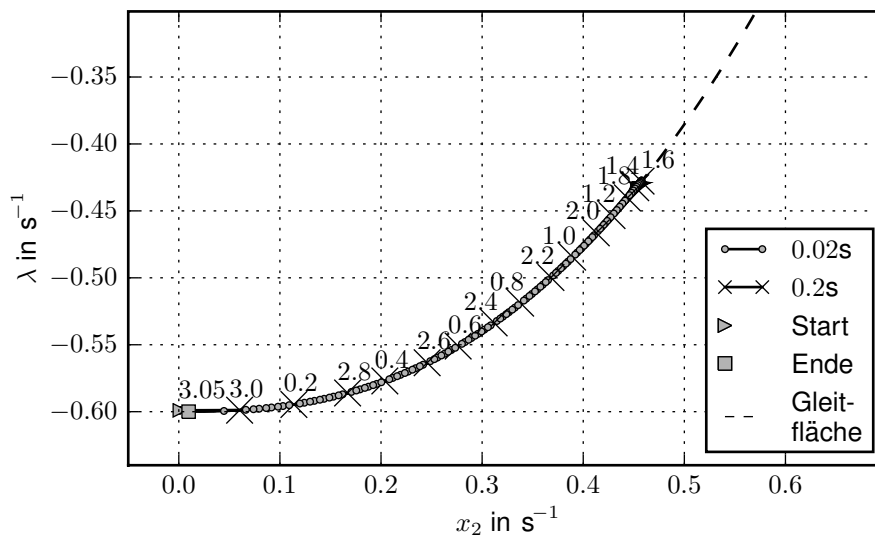
angesetzt werden. Abbildung 30 stellt diese Überlegung dar.



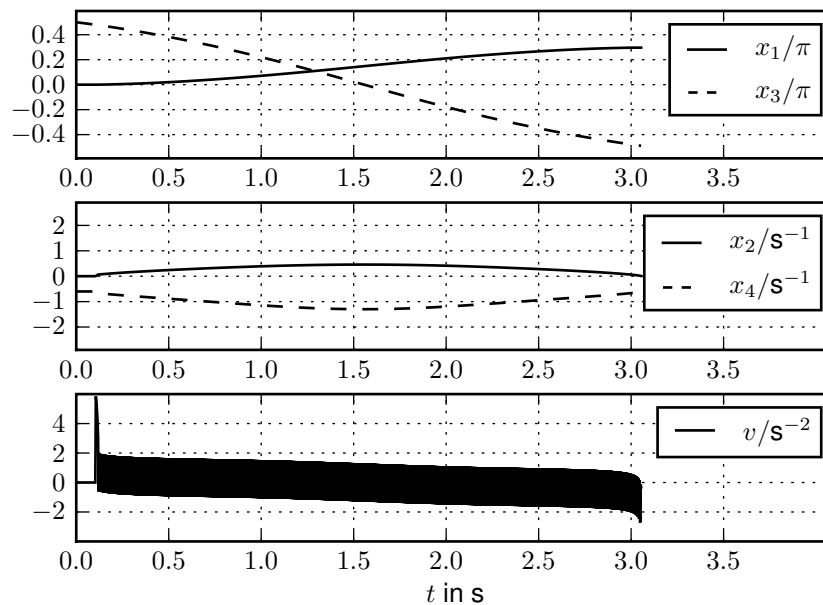
**Abbildung 30:** (a) Schematische Darstellung der Gleitfläche  $\mathcal{S}_{C2}$  für verschiedene Werte des Parameters  $\mu$ . Mit steigendem Wert liegt die Kurve, wie schon im Falle von  $\varphi_{C1}$ , weiter rechts. (b) Prinzipieller Bewegungsablauf auf der Gleitfläche, wenn das Manöver bei  $x_3 = \frac{3}{2}\pi$  beginnt. Die Bemerkungen von Abbildung 29 sind übertragbar.

Es liegt nahe, das Manöver C als aus zwei Teilen, C1 und C2, bestehend aufzufassen, denen jeweils die Bewegung auf einer der beiden Gleitflächen  $\mathcal{S}_{C1}$  bzw.  $\mathcal{S}_{C2}$  zugeordnet wird. Aus den beiden Abbildungen 29 und 30 geht hervor, dass der Wert von  $\mu$  festlegt, wie weit sich die Schaltlinie von der  $\lambda$ -Achse entfernt. Es ist also zu vermuten, dass die Änderung des Schulterwinkels  $\Delta x_1$ , welche während des Teilmanövers erzielt wird, ebenfalls von  $\mu$  abhängt. In Anbetracht der Unkenntnis eines analytischen Ausdrucks dieser Abhängigkeit, erscheint es legitim, sie durch eine Simulationsreihe näherungsweise zu bestimmen. Dies setzt natürlich voraus, dass die Bewegungen auf  $\mathcal{S}_{C1}$  und  $\mathcal{S}_{C2}$  tatsächlich wie beabsichtigt ablaufen und sich mit dem beschriebenen Ansatz sinnvolle Werte für  $\Delta x_1$  erzielen lassen. Um dies exemplarisch zu bestätigen, zeigen die Abbildungen 31 und 32 die Ergebnisse einzelner Simulationsläufe. Abbildung 33 stellt dann den Zusammenhang zwischen  $\mu$  und  $\Delta x_1$  für die Teilmanöver C1 und C2 dar.

Wie erkennbar ist, kann mit dem ersten Teilmanöver eine Änderung des Schulterwinkels bis zu etwas mehr als einer viertel Drehung erreicht werden. Mit dem zweiten Manöver, dessen Startbedingung für  $x_3$  unter Berücksichtigung der Wiederkehr-Eigenschaft derart gewählt wurde, dass es sich unmittelbar im Anschluss



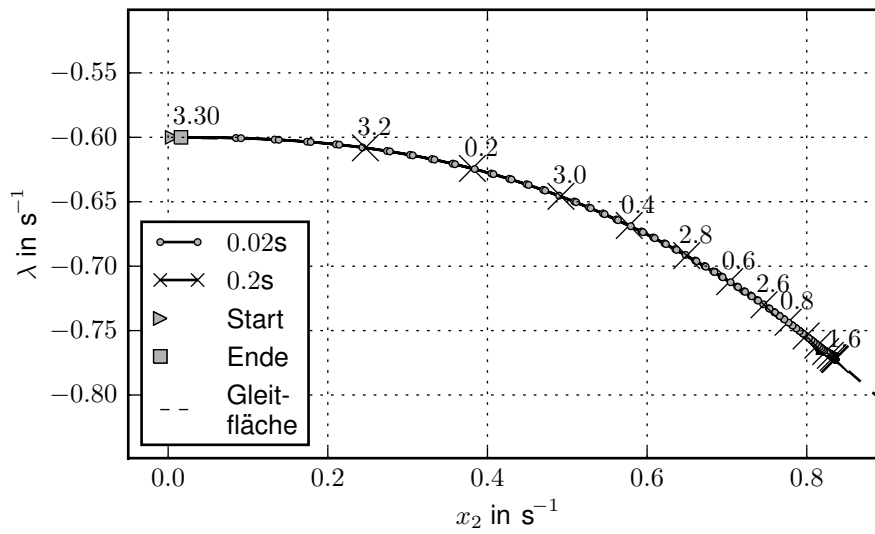
(a)



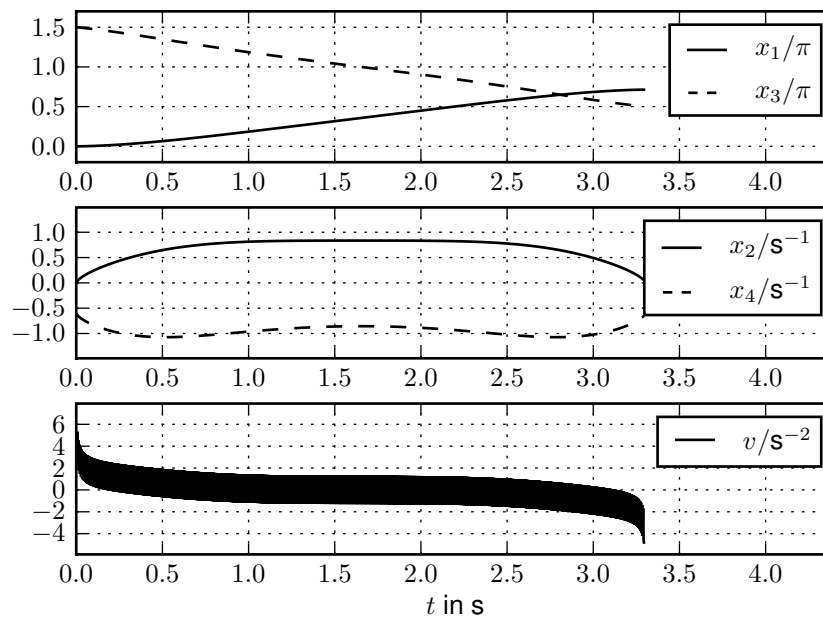
(b)

**Abbildung 31:** Simulationsergebnis für Manöver C1. Für  $\mu = 0.329$  wurde eine Änderung des Schulterwinkels von  $\Delta x_1 = 0.3\pi$  erreicht. (a): Bewegungsablauf auf der Gleitfläche. Bei ungefähr  $t = 1.6$  s ist der Umkehrpunkt erreicht. (b) Zeitlicher Verlauf der Zustandsgrößen und des Eingangs.



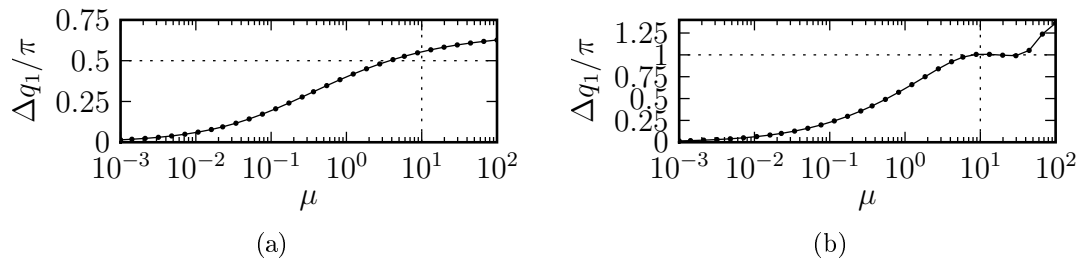


(a)



(b)

**Abbildung 32:** Simulationsergebnis für das Manöver C2. Für  $\mu = 1.479$  wurde eine Änderung des Schulterwinkels von  $\Delta x_1 = 0.7\pi$  erreicht. (a): Bewegungsablauf auf der Gleitfläche. Der Umkehrpunkt wird ebenfalls ca. zum Zeitpunkt  $t = 1.6$  s erreicht. (b) Zeitlicher Verlauf der Zustandsgrößen und des Eingangs.



**Abbildung 33:** Simulativ ermittelter Zusammenhang zwischen  $\Delta x_1$  und  $\mu$ . (a) Für Bewegung auf  $\mathcal{S}_{C1}$ , d. h. für Teilmanöver C1. (b) Für Bewegung auf  $\mathcal{S}_{C2}$ , d. h. für Teilmanöver C2.

an das erste ausführen lässt, kann  $x_1$  um eine weitere halbe Drehung vergrößert werden. Mit einer ebenfalls wieder direkt danach möglichen erneuten Ausführung von C1 kann schließlich die Gesamtänderung auf mehr als eine vollständige Umdrehung vergrößert werden.

Für beide Teilmanöver ist die Abhängigkeit  $\Delta x_1$  von  $\mu$  stark nichtlinear. Im Fall von C2 liegt im betrachteten Wertebereich von  $\mu$  sogar ein nichtmonotoner Zusammenhang vor. Dies hat zur Folge, dass nicht jedem vorgegebenen Wert von  $\Delta x_1$  eindeutig ein  $\mu$  zugeordnet werden kann. Ein Problem stellt dies für das verfolgte Konzept jedoch nicht dar, denn dafür ist es ausreichend, dass die umgekehrte Zuordnung, von  $\mu$  zu  $\Delta x_1$ , eindeutig ist. Obwohl mit  $\mu \gg 10$  auch Schulterwinkelzuwächse erreicht werden könnten, die größer als eine halbe Umdrehung sind, ist anzumerken, dass auf den daraus resultierenden Gleitflächen auch der Eingang  $v$  sehr große Werte annehmen muss, weshalb auf den Einbezug dieses Teils der Kennlinie verzichtet wird. Eine weitere Vergrößerung von  $\Delta x_1$  kann, wie erwähnt, durch ein sich anschließendes C1-Teilmanöver erzielt werden.

Die beiden  $\mu$ - $\Delta x_1$ -Kennlinien können jeweils durch wiederholte Simulationen bestimmt werden, wobei in jedem Simulationslauf der Parameter  $\mu$  leicht verändert wird. Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Lösung der DGL von dem Parameter [Arn01, Abschnitt 2.5], erhält man eine stetige Kennlinie für beide Teilmanöver. Durch Interpolation kann aus dieser zu einem gewünschten Schulterwinkelzuwachs  $\tilde{\Delta}x_1$  ein zugehöriger  $\mu$ -Wert ermittelt werden, sodass dieser Zuwachs näherungsweise erreicht wird. Dies setzt natürlich voraus, dass  $\tilde{\Delta}x_1$  im Wertebereich der Kennlinie des jeweils betrachteten Teilmanövers liegt.

Für den angestrebten Gesamtzuwachs des Schulterwinkels ist diese Eigenschaft i. A. nicht gegeben. Wird das Manöver C als eine sich wiederholende Abfolge von C1 und C2 aufgefasst, liegt es auf der Hand, den Gesamtzuwachs auf die einzelnen Teilmanöver zu verteilen. Diese Verteilung kann nach verschiedenen Gesichtspunk-

ten erfolgen. Eine mögliche Variante wäre, die Gesamtzeit für alle Manöver C zu minimieren. Wir werden jedoch den einfacheren Ansatz verfolgen, der sich wie folgt beschreiben lässt.

Grundgedanke ist es, im jeweils als nächstes ablaufenden Teilmanöver, falls nötig, den größtmöglichen Zuwachs von  $x_1$  anzustreben. Nach Ablauf dieser Bewegung hat sich die noch zu realisierende Vergrößerung des Schulterwinkels um den Wert des erreichten Zuwachses reduziert. Den verbleibenden Rest kann man als neuen Wert für  $\Delta x_1$  interpretieren. Ist er immer noch größer als der im nächsten Teilmanöver maximal realisierbare Zuwachs, wird im folgenden Teilmanöver wiederum die größtmögliche Veränderung von  $x_1$  bewirkt. Ist der verbleibende Rest kleiner, dann kann in diesem Schritt die angestrebte Schulterstellung zumindest näherungsweise erreicht werden.

Da sowohl mit der Abfolge C1-C2-C1 als auch mit C2-C1-C2 mehr als eine vollständige Umdrehung erzielt werden kann, sind mit maximal drei Teilmanövern prinzipiell alle Schulterkonfiguration erreichbar. Allerdings ist das *exakte* Erreichen eines vorgegebenen  $x_1$ -Wertes aus dem selben Grund wie am Ende von Abschnitt 5.4 für Manöver D beschrieben i. A. nicht möglich: Während das Manöver abläuft wird vom Gleitregime-Regler nur auf  $x_2$  und  $\lambda$  reagiert. Die Größe  $x_1$  wird nicht mit in die Rückführung einbezogen. Hinzu kommt, dass auch durch die Interpolation der  $\Delta x_1$ - $\mu$ -Kennlinie eine gewisse Abweichung des  $x_1$ -Wertes am Ende von Manöver C gegenüber dem angestrebten Wert entsteht. Das vorgestellte Manöver realisiert also lediglich die Aufgabe  $(F,0,V,V) \rightarrow (I,0,F,V)$ . Aus den durchgeführten Simulationsuntersuchungen kann jedoch geschlussfolgert werden, dass der Positionierungsfehler im Bereich unter  $5^\circ$  liegt.

Die für die untere Parkposition beschriebene Lösung lässt sich aufgrund der schon mehrfach benutzten Quadrantenumkehr-Eigenschaft aus Abschnitt 5.2 auf die obere übertragen. Dabei läuft die Bewegung mit  $\varphi_{C1}(\lambda) := \varphi_{C2}(\lambda) := -\varphi_{C1}(\lambda)$ ,  ${}^p\lambda = 0.6 \text{ s}^{-1}$  und vertauschten  $x_3$ -Startbedingungen für die Manöver C1 und C2 im zweiten Quadranten ab. Die Anpassung von  $x_1$  erfolgt dann in negativer Richtung. Wenn man die für die untere Parkposition bestimmten Kennlinien als Zusammenhang zwischen  $-\Delta x_1$  und  $\mu$  interpretiert, können sie für die obere Parkposition ebenfalls verwendet werden.

Die Überführung des Schulterwinkels stellte den letzten zu behandelnden Teilschritt des Gesamtkonzeptes dar.

## 5.7 Gesamtablauf

In diesem Abschnitt soll nun zusammengefasst werden, wie mit Hilfe der vier erläuterten Manöver die Überführung des unteraktuierten Manipulators von einer gegebenen Ruhelage in eine andere erreicht werden kann.

Es hat sich gezeigt, dass das im Abschnitt 5.3 skizzierte Konzept im wesentlichen umsetzbar ist. Als Einschränkung muss zur Kenntnis genommen werden, dass eine vorgegebene Zielruhelage nur im Rahmen einer Positioniergenauigkeit von ca.  $7^\circ$  für den Schulterwinkel und  $2^\circ$  für den Ellenbogenwinkel erreicht wird. Außerdem muss aufgrund der Resultate aus Abschnitt 5.4 die Menge der zulässigen Start- und Zielruhelagen derart eingeschränkt werden, dass für beide die Gleichung (154), also

$${}^e x_3 \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_4$$

gilt, wobei die für die Intervallbegrenzungen<sup>30</sup> maßgeblichen Konstanten mit  $\varepsilon_1 = 0.075\pi$  und  $\varepsilon_2 = 0.025\pi$  festgelegt worden waren. Dies entspricht jeweils einer unzulässigen Zone von ca.  $\pm 1.5^\circ$  in der Umgebung von  ${}^e x_3 = k\frac{\pi}{2}$  mit  $k \in \{0, 1, 3, 4\}$  bzw. von ca.  $\pm 4.5^\circ$  in der Umgebung von  ${}^e x_3 = \pi$ .

Für ein Paar  $({}^* \mathbf{x}, {}^\dagger \mathbf{x})$  von zulässigen Ruhelagen, von dem also beide die Bedingung (154) erfüllen, kann die Überführung wie folgt ablaufen: Zunächst muss in einer Vorbereitungsphase das Manöver D in umgekehrter Zeitrichtung simuliert werden. Das Ergebnis dieses Schritts sind zum einen die Werte beider Gelenkwinkel, mit welchen das Bremsmanöver in positiver Zeitrichtung beginnen muss, um die gewünschten Zielruhelage zu erreichen. Diese beiden Werte seien mit  ${}^D x_1$  und  ${}^D x_3$  bezeichnet. Zum anderen erhält man ggf. die zur Beschreibung der Bremsgleitfläche notwendigen Parameter  $\bar{x}_2$  und  $\lambda$ .

Nach der Vorbereitungsphase kann das System mittels der Durchführung des Manövers A aus der Startruhelage in eine der Parkpositionen überführt werden – in welche von beiden, wird dabei wegen der Beziehungen (155) vom Startwert des Ellenbogenwinkels festgelegt. Ist eine der Bedingungen (156) erfüllt, dann hat nun das Manöver B zu erfolgen, bevor Manöver C durchgeführt werden kann. Ist dies nicht der Fall, so wird unmittelbar mit Manöver C fortgefahren, was die Gesamtbewegung zeitlich verkürzt und vereinfacht. Bezeichnet man den Wert des Schulterwinkels am Beginn des Manövers C mit  ${}^C x_1$ , so ergibt sich das zu erzielende  $\Delta x_1$  aus

$$\Delta x_1 := ({}^D x_1 - {}^C x_1) \bmod 2\pi. \quad (160)$$

Diese Verschiebung wird, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, auf die einzelnen Teilmanöver aufgeteilt. Nach der Beendigung dieses Manövers und der damit einhergehenden Positionierung des Schulterwinkels, kann schließlich das Manöver D ausgeführt werden. Die dafür erforderlichen Informationen sind aus der Vorbereitungsphase bekannt.

Die Manöver B, C und D setzen jeweils einen speziellen Wert für  $x_3$  als Startbedingung voraus. Es ergibt sich also vor dem eigentlichen Manöverbeginn eine

<sup>30</sup>Für die Festlegung der Intervalle siehe Abbildung 26(a).

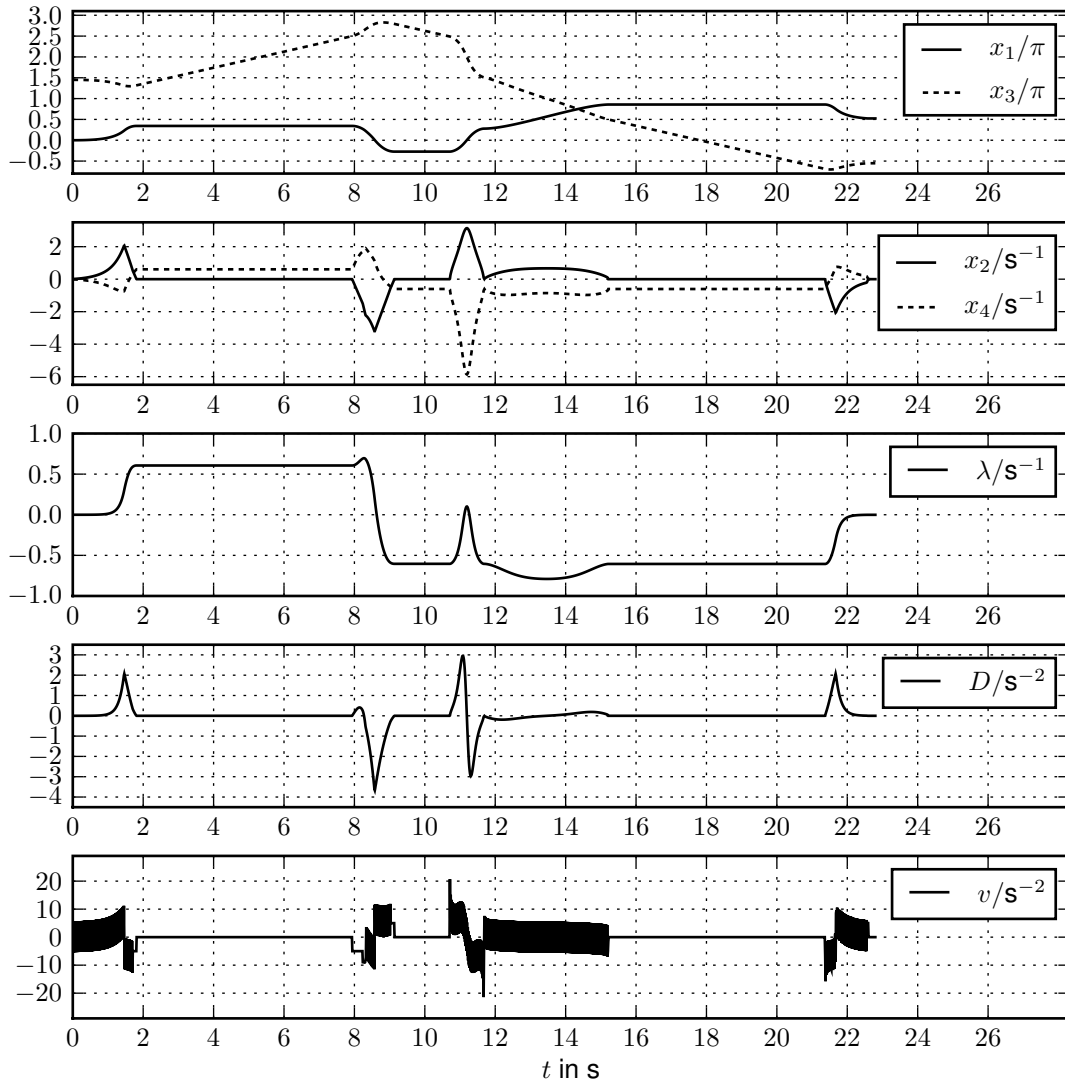
mehr oder weniger lange Wartephase, in welcher das System in der Parkposition verharrt bis der sich mit konstanter Geschwindigkeit verändernde Ellenbogenwinkel den passenden Wert annimmt. Durch  $|{}^p x_4| = |{}^p \lambda| = 0.6 \text{ s}^{-1}$ , was in allen Simulationen verwendet wurde, ist gesichert, dass diese Wartephase nie länger als 10.5 s dauert.

Das Simulationsergebnis einer vollständigen Überführung zwischen zwei Ruhelagen, in welcher alle vier Manöver durchgeführt werden, ist in den Abbildungen 34 und 35 gezeigt. Ausgehend von  ${}^* \mathbf{x} = (0, 0, 1.45\pi, 0)$  wurde die Ruhelage  ${}^d \mathbf{x} = (0.5\pi, 0, 1.45\pi, 0)$  angestrebt. Tatsächlich erreicht wurde in diesem Simulationslauf  ${}^t \mathbf{x}(0.523\pi, 0, -0.552\pi, 0)$ . Für  $x_1$  summieren sich die Positionierungsfehler aus Manöver C und D im konkreten Fall zu ca.  $4.1^\circ$ , wobei mit ca.  $3^\circ$  der größte Teil dabei durch Manöver C verursacht wird. Für  $x_3$  ergibt sich mit  $-0.552 \bmod 2 = 1.448$  ein Positionierungsfehler von lediglich ca.  $0.4^\circ$ .

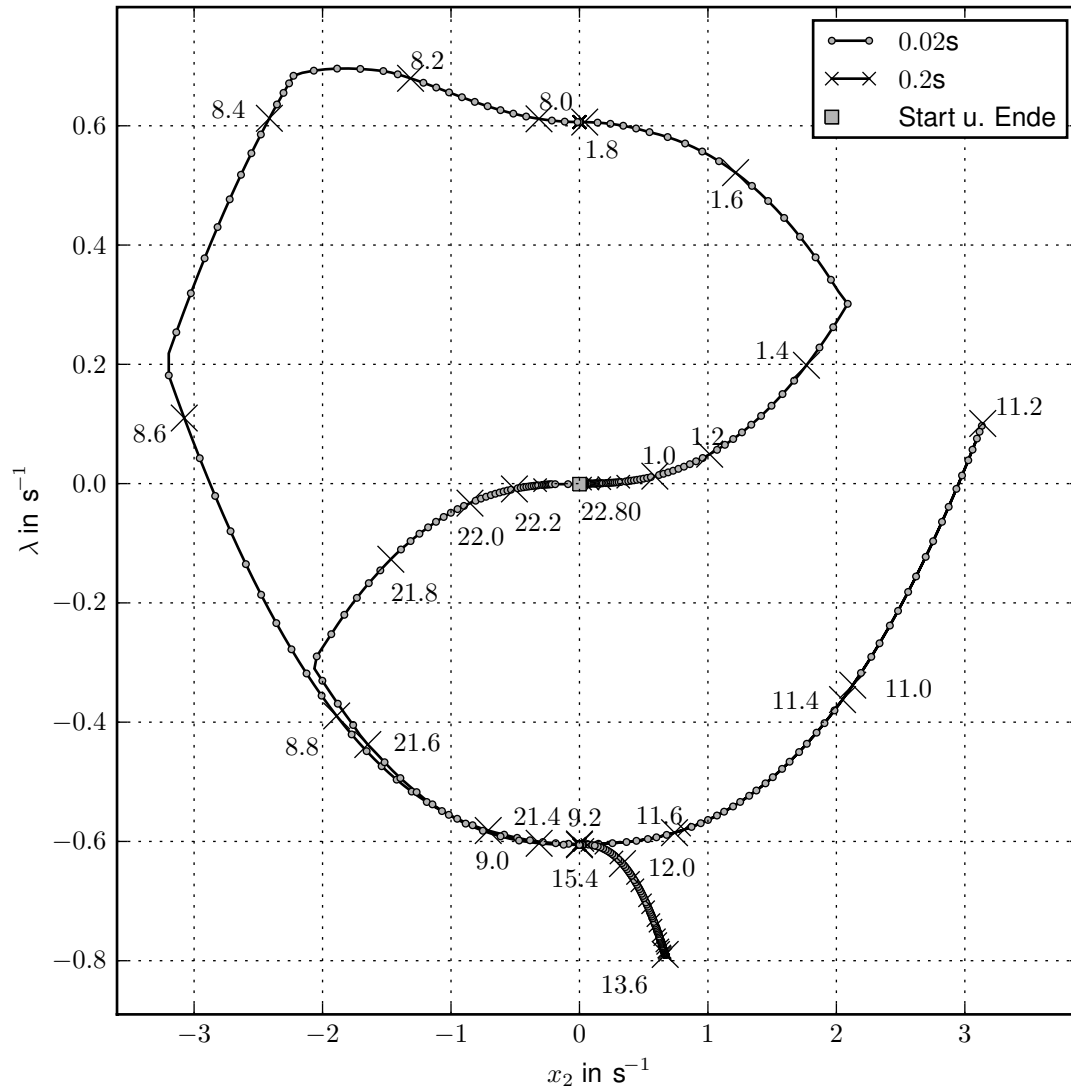
Die Aussagekraft dieser Werte für die Positionierungsfehler ist jedoch begrenzt. Einerseits könnten sie durch Anpassungen der verwendeten Regler- und Simulationsparameter verringert werden, andererseits ist bei einer praktischen Umsetzung des Konzeptes, wenn also Positioniergenauigkeiten eine Rolle spielen würden, durch den Einfluss von Parameterunsicherheiten, nicht modellierter Effekte und Störgrößen mit größeren Abweichungen zu rechnen. Zur groben Einschätzung des vorgestellten Ansatzes sind sie dennoch geeignet.

Abbildung 36 stellt den gesamten Ansatz grafisch dar. Die Piktogramme symbolisieren die einzelnen Manöver und die jeweils dabei stattfindende Bewegung in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. Die auf der Spitze stehenden Vierecke stellen zweiwertige Fallunterscheidungen dar, wobei der mit „1“ gekennzeichnete Zweig aktiv wird, wenn die entsprechende Bedingung erfüllt ist, andernfalls der mit „0“ gekennzeichnete. Die ersten beiden Fallunterscheidungen legen fest, ob das Manöver B durchgeführt wird, die letzten beiden sind dann ausschlaggebend für die konkrete Durchführung von Manöver D. Die Tatsache, dass Manöver C aus mehreren Teilen bestehen kann, wird durch die Umrandung der beiden entsprechenden Piktogramme symbolisiert.

Vergleicht man den in diesem Kapitel beschriebenen Ansatz mit den in Kapitel 3 vorgestellten, so fallen gewisse Ähnlichkeiten in einzelnen Punkten auf. Die Unterteilung in verschiedene Teilschritte ist fast allen Herangehensweisen gemein. Ebenso basieren nahezu alle auf einer partiell linearisierten Modelldarstellung. Ein ähnlicher Gleitregime-Regler, wie der hier verwendete, kommt in Referenz [MRB06] zum Einsatz. Das Instrument der Umkehr der Integrationsrichtung, wird in [WSH04] genutzt. Phasen mit  $x_2 = 0$  und  $v = 0$ , in denen bei konstanter Winkelgeschwindigkeit des Ellenbogens gewartet wird, bis eine für die Durchführung eines Manövers geeignete Konfiguration erreicht ist, sind in [LMO00] expliziter Teil der Steuerungs-Strategie. Ebenfalls vergleichbar zu diesem Ansatz ist, dass eine klare Einordnung in die Kategorien „Steuerung“ und „Regelung“ schwer möglich ist.



**Abbildung 34:** Simulationsergebnis einer Ruhelagenüberführung. Verlauf der Winkel, der -geschwindigkeiten und des Eingangs; außerdem: Verlauf von  $\lambda$  und  $D$ . Deutlich erkennbar sind die Wartephasen vor Beginn der Manöver B, C, und D. Anhand der Verläufe von  $\lambda$  und  $D$  ist u. a. erkennbar, dass zunächst das Teilmanöver C1 (Beginn in positive  $\lambda$ -Richtung) und unmittelbar danach C2 (Beginn in negative  $\lambda$ -Richtung) stattfindet.



**Abbildung 35:** Trajektorie der Ruhelagenüberführung aus Abbildung 34 in der  $x_2$ - $\lambda$ -Ebene. Aus Gründen der besseren Übersicht ist nur ein Teil der Zeitpunkte beschriftet. Die Bahnen der einzelnen Manöver sind recht gut erkennbar: Manöver A im ersten Quadranten, B im zweiten und dritten Quadranten, C1 im vierten und kurzzeitig im ersten, C2 im vierten und Manöver D im dritten Quadranten.

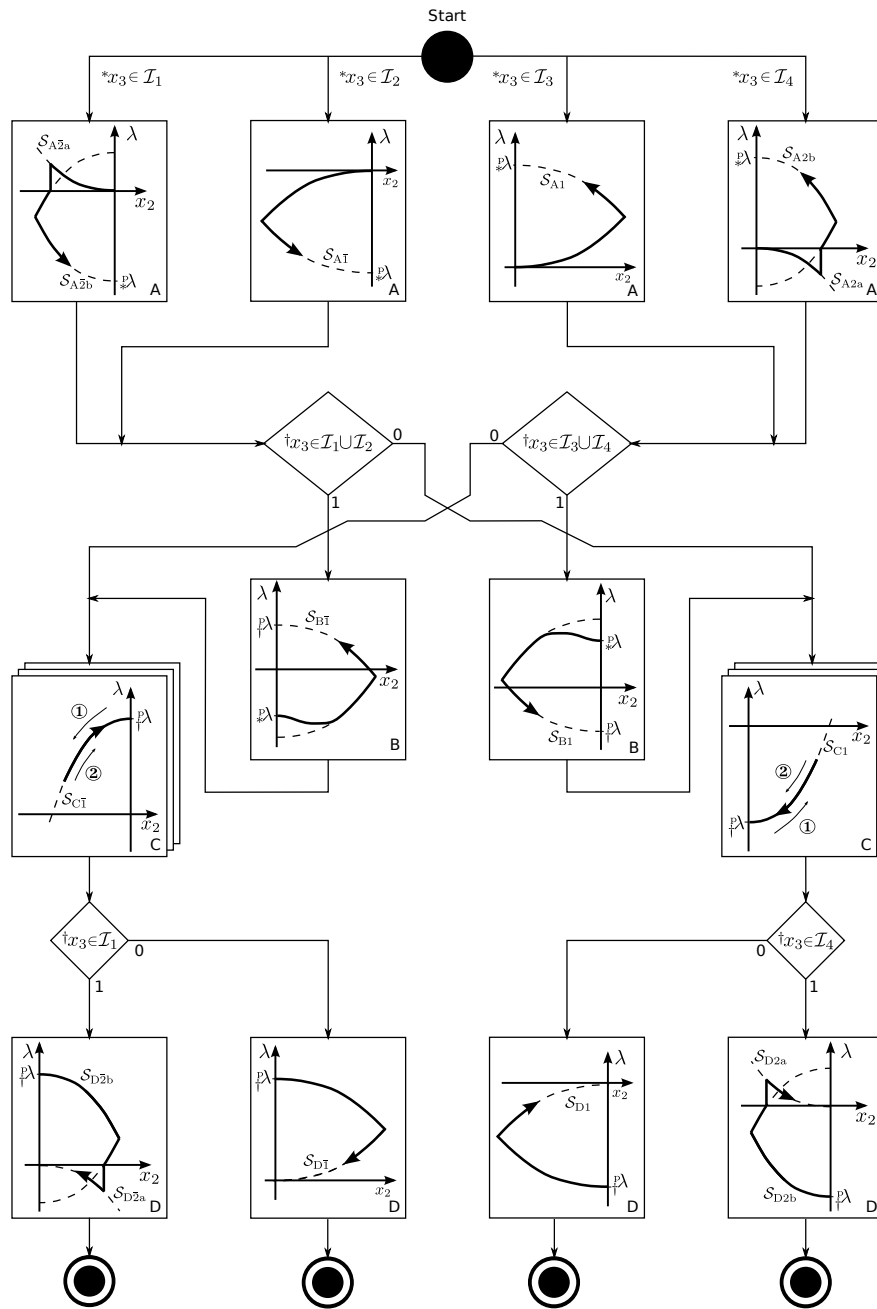


Abbildung 36: Schematisches Ablaufdiagramm zur Ruhelagenüberführung.



Zum einen gibt es eine Rückführung der Zustandsgrößen, um das System auf den Gleitflächen zu stabilisieren. Auch werden die Gelenkwinkel für die Entscheidung benötigt, wann ein Manöver zu beginnen hat. Um eine *Steuerung im engeren Sinne* handelt es sich also nicht [Rei06, Abschnitt 1.3]. Gleichzeitig wird aber während eines Manövers auf Abweichungen der Gelenkwinkel, welche die eigentlichen Regelgrößen darstellen, nicht reagiert. Die angestrebte Ruhelage wird mithin i. A. nicht exakt erreicht, sondern lediglich eine Ruhelage „in deren Nähe“. Diese Eigenschaft teilt der hier vorgestellte Ansatz mit jenem aus Referenz [SKN96]. Natürlich liegt auf der Hand, dass wenn die Abweichung zum Ziel am Ende der Bewegung zu groß ist, ein weiterer kompletter Durchlauf der Manöver A bis D möglich ist. Bezüglich der Kategorisierung aus Abschnitt wird also anstelle der idealen Ruhelagenüberführung  $(F,0,F,0) \rightarrow (V,0,V,0)$  nur die einfachere Problemklasse  $(F,0,F,0) \rightarrow (I,0,I,0)$  gelöst, wobei Anfangs- und Endzustand außerdem jeweils die Bedingung (154) erfüllen müssen. Die Eigenschaft, dass bestimmte Ruhelagen nicht erreicht werden können, trifft, wie im Abschnitt 3.2 festgestellt, auch auf den Ansatz aus [LMO00] zu.

Die wesentlichen Aussagen dieses Kapitels konnten nur auf Basis von Simulationsergebnissen und damit nur für bestimmte Parameterwerte gemacht werden. Dies stellt einen Unterschied zur üblichen Argumentationsweise dar, wo Simulationen dazu dienen, allgemein hergeleitete Zusammenhänge zu veranschaulichen. Vor diesem Hintergrund ist der hier vorgestellte Ansatz lediglich als „Prinzipskizze“ aufzufassen, die zeigt, dass für bestimmte Modell- und Reglerparameter eine Ruhelagenüberführung mit den beschriebenen Manövern möglich ist. Die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse durch theoretische Untersuchungen bleibt für weitere Arbeiten offen.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Aspekte der Steuerung und Regelung des ebenen unteraktuierten Zweigelenkmanipulators betrachtet. In Kapitel 2 wurden die Bewegungsgleichungen sowohl auf Basis des LAGRANGE- als auch des HAMILTON-Formalismus hergeleitet. Weiterhin sind zwei verschiedene Varianten zur partiellen Linearisierung der Systemgleichungen untersucht worden. Dies führte zur Feststellung, dass die Vorgabe der Winkelbeschleunigung im passiven Gelenk zum Auftreten einer endlichen Fluchtzeit führen kann.

Kapitel 3 widmete sich verschiedenen Beiträgen aus der Literatur, die sich mit der Ruhelagenüberführung auseinandersetzen. Dabei konnten zwei verschiedene Richtungen unterschieden werden: Zum einen Verfahren, die mittels einer Haltebremse oder aufgrund der Wirkung von Haftreibung im passiven Gelenk eine Vereinfachung des Problems erreichen, und somit in relativ einfach zu planenden und kurzen Manövern zur Realisierung des Arbeitspunktwechsels resultieren. Zum anderen Verfahren, die weder von einer Bremse noch von Reibung ausgehen, und zu verhältnismäßig langwierigen Manövern führen. Vielen Ansätzen gemeinsam ist, dass sie sich aus mehreren Teilschritten zusammensetzen.

Einige Aspekte, die in der Literatur bisher weniger im Mittelpunkt standen, waren Gegenstand des Kapitels 4. Es wurde zunächst von einem allgemeinen Standpunkt aus eine formale Klassifikation möglicher Regelungsaufgaben vorgenommen. Weiterhin fanden Erhaltungsgrößen der verschiedenen Systemdarstellungen Betrachtung, so wie die Symmetrie der Bewegungsgleichungen und die daraus resultierenden Eigenschaften. Im letzten Abschnitt des Kapitels wurde die Darstellung des Systems in Byrnes-Isidori-Normalform eingeführt, welche das intuitive Verständnis der Systemdynamik erleichtert.

Motiviert durch die Möglichkeit, den Manipulator durch einen Gleitregime-Regler, der nach Analogieüberlegungen konstruiert wurde, abzubremsen, ist in Kapitel 5 ein Ansatz zur heuristischen Bewegungsplanung für die Ruhelagenüberführung des unteraktuierten Manipulatormodells vorgestellt worden. Die angewendete Vorgehensweise zum Entwurf der Gleitflächen für die einzelnen Teilmanöver bestand dabei im wesentlichen aus der Kombination von qualitativen Überlegungen und Simulationsuntersuchungen. Für erstere erwies sich die Diskussion der Systemdynamik in der Normalform-Darstellung als hilfreich.

Für zukünftige Arbeiten, die sich mit dem unteraktuierten Zweigelenkmanipulator beschäftigen, sind verschiedene Richtungen denkbar. Eine Möglichkeit wäre, die Teilmanöver des in Kapitel 5 vorgestellten Ansatzes, insbesondere das abschließende Bremsmanöver, dahingehend zu erweitern, dass die Gleitfläche während der Ausführung des Manövers angepasst wird, um eventuell auftretenden Abweichungen der Gelenkwinkel entgegenzuwirken. Auch bietet die vorgestellte Heuristik

noch Optimierungspotential, wie das beispielsweise in Hinblick auf die Dauer des Manövers C in Abschnitt 5.6 angedeutet wurde. Theoretische Untersuchungen, welche zu Ergebnissen führen, die unabhängig von Simulationen sind, könnten diese Überlegungen unterstützen. Vor allem aber würden sie zeigen, in wie weit sich das vorgestellte Konzept verallgemeinern lässt.

Eine andere Möglichkeit die Arbeit fortzuführen, besteht in der Einbeziehung praktischer Aspekte. Dies kann beispielsweise bedeuten, den Einfluss von Modellsicherheiten und Messfehlern zu betrachten, oder aber die Dynamik des Antriebs in die Untersuchungen mit einzubeziehen, welcher in der vorliegenden Arbeit, wie in nahezu allen diesbezüglich zitierten Referenzen, als Drehmomentenquelle idealisiert wird. In diesem Zusammenhang könnten auch Möglichkeiten zur Vermeidung des Klapper-Effektes studiert werden. Vorschläge dazu sind beispielsweise in den Referenzen [SL91, Abschnitt 7.2] und [Heb95] enthalten.

In der Konzeption und dem Aufbau eines Versuchsstandes, welcher die Anpassung wichtiger Systemeigenschaften ermöglicht, könnte ebenfalls ein Ziel weiterer Arbeiten liegen. Ließe sich beispielsweise der Haftreibungskoeffizient im Ellenbogen und der Trägheitsparameter  $\eta$  mit wenig Aufwand justieren, so würde ein sehr flexibler Versuchsstand zur Verfügung stehen, der ausgiebige experimentelle Untersuchungen ermöglichte – nicht zuletzt im Hinblick auf anschauliche Praktikumsversuche im Rahmen der regelungstechnischen Ausbildung eine interessante Perspektive.

---

## Literatur

- [AT91] H. ARAI und S. TACHI: *Position Control System of a Two Degree of Freedom Manipulator with a Passive Joint*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Bd. 30, S. 15–20, 1991.
- [Arn01] V. I. ARNOLD: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Springer Verlag, Berlin, 2. Aufl., 2001.
- [AE08] H. ASHRAFIUON und R. S. ERWIN: *Sliding mode control of underactuated multibody systems and its application to shape change control*, International Journal of Control, Bd. 81, S. 1849–1858, 2008.
- [Aul04] B. AULBACH: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Elsevier, 2. Aufl., 2004.
- [BS06] R. BANAVAR und V. SANKARANARAYANAN: *Switched Finite Time Control of a Class of Underactuated Systems*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [BX96] M. BERGERMAN und Y. XU: *Robust Joint and Cartesian Control of Underactuated Manipulators*, Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Bd. 118, S. 557–565, 1996.
- [BB98] S. P. BHAT und D. S. BERNSTEIN: *Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators*, IEEE Transactions on Automatic Control, Bd. 43(5), S. 678–682, 1998.
- [Bro83] R. W. BROCKETT: *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in R. W. BROCKETT, R. S. MILLMANN und H. J. SUSSMANN, Herausgeber, *Differential geometric control theory*, Birkhauser, Boston, 1983.
- [GHZ05] K. GRAICHEN, V. HAGENMEYER und M. ZEITZ: *A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems*, automatica, Bd. 41, S. 2033–2041, 2005.
- [GTZ05] K. GRAICHEN, M. TREUER und M. ZEITZ: *Fast Side-Stepping of the Triple Inverted Pendulum via Constrained Nonlinear Feedforward Control Design*, in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, 2005.
- [GZ06] K. GRAICHEN und M. ZEITZ: *Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen*, at - Automatisierungstechnik, Bd. 4, S. 187–199, 2006.

- 
- [Heb95] H. HEBISCH: *Grundlagen der Sliding-Mode-Regelung*, Forschungsbericht 15/95, Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 1995.
- [Isi95] A. ISIDORI: *Nonlinear Control Systems*, Springer Verlag, Berlin, 3. Aufl., 1995.
- [SCIPY] E. JONES, T. OLIPHANT und P. E. A. PETERSON: *SciPy: Open source scientific tools for Python*, 2001–2009.
- [Kuy08] F. KUYPERS: *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH, 2008.
- [LMO97] A. D. LUCA, R. MATTONE und G. ORIOLO: *Stabilization of Underactuated Robots: Theory and Experiments for a Planar 2R Manipulator*, in *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation Albuquerque, New Mexico*, April 1997.
- [LMO00] A. D. LUCA, R. MATTONE und G. ORIOLO: *Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Bd. 10, S. 181–198, 2000.
- [MRB06] A. MAHINDRAKAR, S. RAO und R. N. BANAVAR: *Point-to-point control of a 2R planar horizontal underactuated manipulator*, *Mechanism and Machine Theory*, Bd. 41(7), S. 838–844, Juli 2006.
- [MBS98] J. MARECZEK, M. BUSS und G. SCHMIDT: *Robust Global Stabilization of the Underactuated 2-DOF Manipulator R2D1*, in *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation Leuven, Belgium*, 1998.
- [MMW01] G. MERZIGER, G. MÜHLBACH, D. WILLE und T. WIRTH: *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*, Binomi, 2001.
- [Nol04] W. NOLTING: *Grundkurs Theoretische Physik 2*, Springer-Verlag, Berlin, 6. Aufl., 2004.
- [Olf01] R. OLFATI-SABER: *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*, Doktorarbeit, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [ON91] G. ORIOLO und Y. NAKAMURA: *Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators*, in *Proceedings of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, S. 2398–2403, 1991.

- [Rei06] K. REINSCHKE: *Lineare Regelungs und Steuerungstheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [RRZ97] R. ROTHFUSS, J. J. RUDOLPH und M. ZEITZ: *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*, at - Automatisierungstechnik, Bd. 45, S. 517–525, 1997.
- [SH00] N. SCHERM und B. HEIMANN: *Dynamics and control of underactuated manipulation systems: A discrete-time approach*, Robotics and Autonomous Systems, Bd. 30, S. 237–248, 2000.
- [SH01] N. SCHERM und B. HEIMANN: *Nichtlineare zeitdiskrete Regelung eines unteraktuierten Manipulators*, at -Automatisierungstechnik, Bd. 49, S. 107–115, März 2001.
- [Sch99] H. SCHWARZ: *Einführung in die Systemtheorie nichtlinearer Regelungen*, Shaker Verlag, 1999.
- [Sch06] P. SCHWEITZER: *Regelung eines unteraktuierten mechanischen Systems*, Diplomarbeit, Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik, Technische Universität Graz, 2006.
- [SKR00] L. F. SHAMPINE, J. KIERZENKA und M. W. REICHELT: *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c*, 2000, [http://www.mathworks.com/support/solutions/files/s8314/bvp\\_paper.pdf](http://www.mathworks.com/support/solutions/files/s8314/bvp_paper.pdf).
- [SL91] J.-J. E. SLOITINE und W. LI: *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [Sp98] M. W. SPONG: *Underactuated mechanical Systems*, in B. SICILIANO und K. P. VALAVANIS, Herausgeber, *Control Problems in Robotics and Automation*, S. 135–50, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [SKN96] T. SUZUKI, M. KOINUMA und Y. NAKAMURA: *Chaos and Nonlinear Control of a Nonholonomic Free-Joint Manipulator*, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Bd. 3, S. 2668–2675, 1996.
- [WSH04] D. WEIDEMANN, N. SCHERM und B. HEIMANN: *Bidirectional Path Planning for Underactuated Manipulators using a Discrete-Time Approach*, in *Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004.

- [XO08] R. XU und Ü. ÖZGÜNER: *Sliding mode control of a class of underactuated systems*, automatica, Bd. 44, S. 233–241, 2008.

## Abbildungsverzeichnis

1	Schematische Darstellung des Zweigelenkmanipulators . . . . .	4
2	Funktionsverläufe von $\tilde{\omega}(x_3)$ und $\tilde{\Omega}(x_3)$ . . . . .	14
3	Simulierter Zeitverlauf $x_2(t)$ mit endlicher Fluchtzeit . . . . .	15
4	Zeitverlauf des Eingangs für einen Iterationsschritt . . . . .	23
5	Simulationsergebnis (zyklischen Steuerung) . . . . .	25
6	Simulationsergebnis der Optimierungslösung . . . . .	28
7	Konvergenz des Levenberg-Marquadt-Algorithmus . . . . .	28
8	Ruhelagenüberführung als RWA-Lösung . . . . .	32
9	Eingangs-Wirkungs-Gerade in der Phasenebene . . . . .	41
10	$x_2$ - $\lambda$ -Ebene . . . . .	43
11	Sektor-Einteilung der $x_2$ - $\lambda$ -Ebene . . . . .	44
12	Vergleich der Richtungsfelder . . . . .	49
13	Simulationsergebnis: Gleitregime-Bremse (I) . . . . .	52
14	Simulationsergebnis: Gleitregime-Bremse (II) . . . . .	53
15	Manöver-Startvorgang . . . . .	59
16	Schematische Übersicht zur Ruhelagenüberführung . . . . .	62
17	Gleitfläche $\mathcal{S}_{A1}$ . . . . .	63
18	Simulationsergebnis für Manöver A1 . . . . .	64
19	Bewegungsabläufe für Manöver A (Nominal- und Problemfall) . . . .	64
20	Manöverdauer für ${}^e x_3 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ . . . . .	65
21	Simulierte Bewegungen auf $\mathcal{S}_{A1}$ für ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ . . . . .	67
22	Bewegung aus einer Ruhelage mit ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ in die Parkposition	69
23	Problem und Lösung bei mehrteiligen Gleitflächen . . . . .	70
24	Simulierte Bewegung auf $\mathcal{S}_{A2a}$ und $\mathcal{S}_{A2b}$ . . . . .	71
25	Manöverdauer für ${}^e x_3 \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ . . . . .	72
26	Lage der Intervalle für zulässige Werte von ${}^e x_3$ und Zusammenhang zwischen ${}^e x_3$ und ${}^p \lambda$ . . . . .	74
27	Bewegungsablauf des Manövers zur $x_4$ -Überführung . . . . .	75

28	Simulationsergebnis des Manövers zur $x_4$ -Überführung . . . . .	75
29	Gleitfläche $\mathcal{S}_{C1}$ und Bewegung darauf (schematisch) . . . . .	77
30	Gleitfläche $\mathcal{S}_{C2}$ und Bewegung darauf (schematisch) . . . . .	78
31	Simulationsergebnis für Manöver C1 . . . . .	79
32	Simulationsergebnis für Manöver C2 . . . . .	80
33	Simulativ ermittelter Zusammenhang zwischen $\Delta x_1$ und $\mu$ . . . . .	81
34	Simulationsergebnis einer kompletten Ruhelagenüberführung . . . . .	85
35	Simulationsergebnis einer kompletten Ruhelagenüberführung ( $x_2$ - $\lambda$ - Ebene) . . . . .	86
36	Schematisches Ablaufdiagramm zur Ruhelagenüberführung . . . . .	87